

ESTABILIDADE DE SISTEMAS CHAVEADOS DESCRITORES AFINS COM APLICAÇÃO EM UM CIRCUITO ELETROESTIMULADOR¹

Edson Italo Mainardi Júnior²

Diogo Ramalho de Oliveira

Lucas Rangel de Oliveira

Estélio da Silva Amorim

Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira

RESUMO

Este artigo tem como objetivo a modelagem matemática e o estudo de estabilidade de um circuito de estimulação elétrica em corrente pulsada. Assim, o trabalho apresenta um circuito de estimulação elétrica o qual é representado matematicamente por um modelo não linear. Ademais, a modelagem matemática é baseada em representação por espaço de estados visando representar o modelo como um sistema chaveado descritor afim. Logo, o estudo de estabilidade do sistema é desenvolvido com base em uma função quadrática de Lyapunov e Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs), que quando factíveis, demonstram que o sistema pode ser controlado por uma estratégia de chaveamento adequada. Os resultados de simulação apresentados evidenciam que o procedimento de projeto proposto tem um desempenho adequado, sendo que resultados experimentais validam a modelagem proposta no projeto.

Palavras-chave: Circuito eletroestimulador. Modelagem. Controle não linear.

¹ **Como citar este artigo:**

MAINARDI JÚNIOR, E. I.; OLIVEIRA, D. R. de.; OLIVEIRA, L. R. de.; ESTÉLIO, S. A.; MARCELO, C. M. T. Estabilidade de sistemas chaveados descritores afins com aplicação em um circuito eletroestimulador. **ForScience**, Formiga, v. 10, n. 1, e01082, jan./jun. 2022. DOI: 10.29069/forscience.2022v10n1.e1082.

² **Autor para correspondência:** Edson Italo Mainardi Júnior, edson.mainardi@ifms.edu.br

STABILITY OF KEY SYSTEMS RELATED DESCRIPTORS WITH APPLICATION IN AN ELECTROSTIMULATOR CIRCUIT

ABSTRACT

This article aims the mathematical modeling and a stability study of a pulsed current electrical stimulation circuit. Thus, the paper presents an electrical stimulation circuit which is mathematically represented by a non-linear model. Furthermore, the mathematical modeling is based on state space representation in order to represent the model as an affine descriptor switched system.. Therefore, the stability study of the system is developed based on a quadratic Lyapunov function and Linear Matrix Inequalities (LMIs), which when feasible, demonstrate that the system can be controlled by an adequate switching strategy. The simulation results presented show that the proposed design procedure has an adequate performance, and experimental results validate the modeling proposed in the project.

Keywords: Electrostimulator circuit. Modeling. Non-linear control.

1 Introdução

Atualmente, tem crescido na comunidade acadêmica o interesse em modelar matematicamente circuitos elétricos considerando-se todos os parâmetros não lineares da planta, devido, principalmente, ao fato de essa classe de sistemas representar com mais detalhes o comportamento dinâmico de um sistema (YOSHIMURA *et al.*, 2013; CARDIM *et al.*, 2009a; DEAECTO *et al.*, 2010). Entretanto, nota-se que a maioria das metodologias existentes na literatura para modelagem matemática de circuitos elétricos considera simplificações nos modelos, de modo a se obter um sistema linear, visto que procedimentos para determinar soluções envolvendo sistemas não lineares são, em geral, complexos.

No entanto, tem havido um crescente interesse de pesquisadores sobre a teoria e aplicações de sistemas de controle considerando, em seu modelo, as características não lineares do sistema (MAZUMDER; NAYFEH; BOROJEVIC, 2002; HE; XU; CHENG, 2010; CARDIM *et al.*, 2009b; PFEIFER; LOBATO, 2013; AMARAL; ALBERTO, 2016; ZHAI *et al.*, 2018; XIAO; ZHAI; HUANG, 2020). Assim, motivados pela ampla aplicação da teoria de controle utilizando modelos de sistemas não lineares em sistemas práticos, esta pesquisa se concentra em propor uma modelagem não linear de um circuito de estimulação elétrica. Para a análise do método de projeto, é proposta a representação do sistema por equações em espaço de estados. Os autores demonstram que o modelo matemático não linear proposto pode ser representado por uma classe de sistemas descritores chaveados não lineares afins.

Logo, a contribuição principal deste artigo é a proposta de uma modelagem matemática e estudo de estabilidade de um circuito de estimulação elétrica para uma estratégia de chaveamento arbitrária. A análise de estabilidade foi reduzida a problemas descritos por LMIs (BOYD et al., 1994; CARNIATO et al., 2018; MAINARDI JÚNIOR et al., 2015) que, quando factíveis, são facilmente resolvidos por meio de ferramentas disponíveis na literatura de programação convexa, por exemplo Gahinet et al. (1995). Todavia, sistemas descritores chaveados não lineares afins são mais difíceis de serem controlados do que os sistemas chaveados lineares, pois é possível que os subsistemas não compartilhem o mesmo ponto de equilíbrio do sistema global. Desta forma, o conceito de estabilidade deve ser estendido, e as ideias contidas em Bolzern e Spinelli (2004), utilizadas.

Metodologicamente, a proposta do trabalho é o estudo teórico e a análise experimental de um protótipo que forneça adequadamente uma corrente pulsada na saída, na ordem de miliamperes (mA). Os autores evidenciam, ainda, que o protótipo proposto permite a estimulação de músculos com uma tensão máxima de $40V$, corrente elétrica máxima de $4mA$ e frequência do sinal de saída ajustável em uma faixa de valores entre $20Hz$ e $60Hz$ (MAINARDI JÚNIOR; FRIGO; FIDELIS, 2018). Simulações são comparadas com testes experimentais e validam que a modelagem e a técnica de controle propostas têm um desempenho adequado.

A notação usada é padrão. Para matrizes ou vetores reais, (\prime) indica o seu transposto, e o conjunto composto pelos primeiros N inteiros positivos, ou seja, $\{1, \dots, N\}$, é denotado por \mathbf{K} . Já o conjunto de todos os vetores $\lambda = [\lambda_1 \dots \lambda_N]'$, tais que $\lambda_i \geq 0$, $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ e $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_N = 1$, é caracterizado por Λ , e a combinação convexa de um conjunto de matrizes $\{\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_N\}$ é denotado por $\mathcal{H}_\lambda = \sum_{i=1}^N \lambda_i \mathcal{H}_i$, sendo λ pertencente ao conjunto Λ .

2 Estimulação Muscular

Eletroestimuladores são circuitos elétricos destinados a fornecer correntes elétricas adequadas ao corpo humano, a fim de que se possa alcançar efeitos desejáveis no processo de reabilitação de diversas patologias (MAINARDI JÚNIOR; FRIGO; FIDELIS, 2018). Entretanto, a aplicação e o estudo dessa metodologia vêm sendo estruturados desde meados de 1786, quando o fisiologista italiano Luigi Galvani iniciou uma série de experimentos, que consistiam na aplicação de cargas elétricas em nervos e músculos de anfíbios, tais como rãs e sapos, com o intuito de provocar contrações musculares (FARIA, 2006).

No ano de 1850, o cientista e pesquisador Helmholtz criou um instrumento, deno-

minado Inductorium, destinado a gerar sinais de pulsos elétricos com amplitude de tensão e frequência variáveis (GEDDES, 1994). Mais adiante, em 1858, um dos mais importantes eletroestimuladores foi desenvolvido por Bernad, designado estimulador pinça, devido ao seu formato. Basicamente, o eletroestimulador consistia em pilhas voltaicas, de zinco e cobre, adaptadas em braços de madeira e fixadas em uma mola de metal (GEDDES, 1994).

Contudo, com os avanços das pesquisas na temática, nos últimos anos, têm-se desenvolvido circuitos eletroestimuladores que contribuíram significativamente para as pesquisas de aplicação de corrente elétrica em seres humanos (FARIA, 2006). Em Rodriguez (2016), foi implementado um circuito eletroestimulador utilizando ponte H e espelho de corrente, com o objetivo de gerar sinais elétricos bifásicos, balanceados, controlados por corrente, sem a necessidade de alimentação simétrica. Outros estudos recentes sobre eletroestimuladores podem ser encontrados em (GRILLO; SIMÕES, 2003; FARIA, 2006; SILVA, 2010; JUNQUEIRA et al., 2013).

Neste trabalho, a metodologia empregada consiste em um protótipo que forneça adequadamente um sinal de corrente pulsada. Define-se corrente pulsada como uma corrente derivada da junção de vários sinais de curta duração, da ordem de microssegundos a milissegundos, seguidos de intervalos entre pulsos onde não há circulação de corrente (VELLOSO, 2005). Assim, valores de intensidade de corrente aconselháveis para um tratamento eficaz variam de $1,5mA/cm^2$ a $4mA/cm^2$ (VELLOSO, 2005). Valores fora da faixa de intensidade recomendada podem não produzir efeitos fisiológicos desejados, conduzindo a resultados clínicos insatisfatórios, além de sensações indesejáveis aos pacientes. No que tange à frequência, os valores aconselháveis para um tratamento eficaz estão na faixa de $20Hz$ a $60Hz$ (MAINARDI JÚNIOR; FRIGO; FIDELIS, 2018). Frequências inferiores a $20Hz$ podem provocar contração fasciculada, sendo ineficazes para geração de movimentos funcionais; e frequências superiores a $60Hz$ tendem a provocar desconforto sensorial (KRUEGER et al., 2010).

2.1 Modelo em Espaço de Estados de um Circuito Eletroestimulador

Nessa seção, é proposta a modelagem em espaço de estados de um circuito eletroestimulador a fim de representá-lo como um sistema chaveado não linear. Logo, considere a Figura 1, que ilustra o diagrama esquemático de um circuito eletroestimulador, sendo $V_{in}(t)$ a tensão de entrada constante para todo $t \geq 0$; $V_{out}(t)$, a tensão na saída do circuito para todo $t \geq 0$; R_b , a resistência parasita da indutância L_b ; R_p , a resistência parasita do primário do transformador; R_s , a resistência parasita do secundário do transformador; L_p ,

a indutância primária do transformador; L_s , a indutância secundária do transformador; N_1 e N_2 , os ganhos do transformador; $i_b(t)$, a corrente no indutor L_b ; $i_p(t)$, a corrente no primário do transformador; e $i_s(t)$, a corrente no secundário do transformador para todo $t \geq 0$. A resistência de carga do circuito eletroestimulador é definida como sendo R_{out} , e $S_1(t)$ é uma chave automática de controle, sendo $S_1(t) \in \{0, 1\}$. Assim, $S_1(t) = 0$ representa uma chave aberta (OFF), e $S_1(t) = 1$, uma chave fechada (ON).

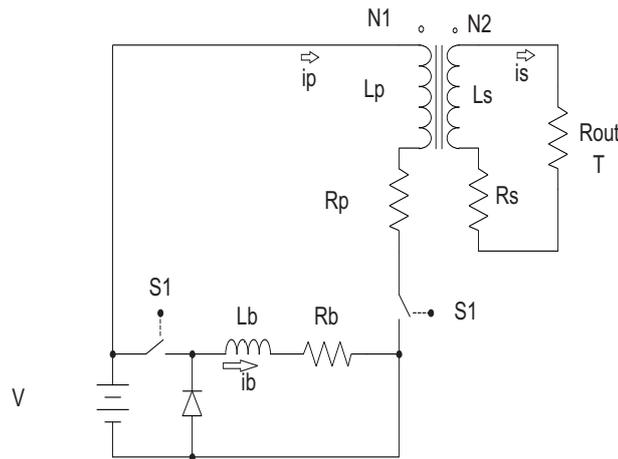


Figura 1 – Circuito eletroestimulador proposto.

Seguindo, note que, para $S_1(t) \in \{0, 1\}$, o circuito eletroestimulador pode ser dividido em dois modos da operação. Assim, para $S_1(t) = 1$ (chave fechada), observe que as equações que definem o modelo instantâneo do circuito eletroestimulador proposto são representadas por:

$$\begin{cases} V_{in}(t) - L_b \frac{di_b(t)}{dt} - R_b i_b(t) = 0, \\ V_{in}(t) - L_p \frac{di_p(t)}{dt} - L_{dp} \frac{di_p(t)}{dt} + \left(\frac{N_1}{N_2}\right) L_s \frac{di_s(t)}{dt} - R_p i_p(t) = 0, \\ \left(\frac{N_2}{N_1}\right) L_p \frac{di_p(t)}{dt} - L_s \frac{di_s(t)}{dt} - L_{ds} \frac{di_s(t)}{dt} - R_s i_s(t) - R_{out} i_s(t) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

sendo L_{dp} e L_{ds} indutâncias de dispersão do primário e secundário do transformador, respectivamente (veja [Staudt \(2009\)](#) para maiores detalhes). Ademais, para $S_1(t) = 0$ (chave aberta), as equações que definem o modelo instantâneo do circuito eletroestimulador pro-

posto são representadas por:

$$\begin{cases} -L_b \frac{di_b(t)}{dt} - R_b i_b(t) = 0, \\ -L_p \frac{di_p(t)}{dt} - L_{dp} \frac{di_p(t)}{dt} + \left(\frac{N_1}{N_2}\right) L_s \frac{di_s(t)}{dt} - R_p i_p(t) = 0, \\ \left(\frac{N_2}{N_1}\right) L_p \frac{di_p(t)}{dt} - L_s \frac{di_s(t)}{dt} - L_{ds} \frac{di_s(t)}{dt} - R_s i_s(t) - R_{out} i_s(t) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Então, definindo como variável de estado do sistema chaveado não linear $x(t) = [i_b(t) \ i_p(t) \ i_s(t)]'$, note que, de (1), (2) e da Figura 1, o circuito eletroestimulador pode ser representado por:

$$\begin{bmatrix} L_b & 0 & 0 \\ 0 & (L_p + L_{dp}) & -\frac{N_1}{N_2} L_s \\ 0 & -\frac{N_2}{N_1} L_p & (L_s + L_{ds}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{di_b(t)}{dt} \\ \frac{di_p(t)}{dt} \\ \frac{di_s(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_b & 0 & 0 \\ 0 & -R_p & 0 \\ 0 & 0 & -(R_s + R_{out}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_b(t) \\ i_p(t) \\ i_s(t) \end{bmatrix} + S_1(t) \begin{bmatrix} V_{in}(t) \\ V_{in}(t) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

sendo $S_1(t) \in \{0, 1\}$.

3 Controle de Sistemas Chaveados Descritores Afins

Considere o sistema descritor chaveado afim definido pela seguinte realização em espaço de estados:

$$\begin{cases} E_{\sigma(t)} \dot{x}(t) = \mathcal{H}_{\sigma(t)} x(t) + \mathcal{G}_{\sigma(t)}, \\ y(t) = \mathcal{F}_{\sigma(t)} x(t), \end{cases} \quad (4)$$

sendo $x(t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estado, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ o vetor de saída, e $\sigma(t): t \geq 0 \rightarrow \mathbb{K}$ a estratégia de chaveamento. Para um conjunto conhecido de matrizes $E_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathcal{H}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathcal{G}_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $\mathcal{F}_i \in \mathbb{R}^p$, $i \in \mathbb{K}$, tal que $E_{\sigma(t)} \in \{E_1, E_2, \dots, E_N\}$, $\mathcal{H}_{\sigma(t)} \in \{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \dots, \mathcal{H}_N\}$, $\mathcal{G}_{\sigma(t)} \in \{\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_N\}$, $\mathcal{F}_{\sigma(t)} \in \{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_N\}$, a estratégia de chaveamento $\sigma(t)$ seleciona, a cada instante de tempo $t \geq 0$, um subsistema conhecido dentro dos N subsistemas disponíveis.

Logo, note que o sistema (3) é um sistema descritor chaveado afim e pode ser representado pelo sistema (4). Assim, as matrizes que definem a representação em espaço

de estados para o circuito eletroestimulador proposto na Figura 1 são dadas na sequência.

$$E_1 = E_2 = \begin{bmatrix} L_b & 0 & 0 \\ 0 & (L_p + L_{dp}) & -\frac{N_1}{N_2}L_s \\ 0 & -\frac{N_2}{N_1}L_p & (L_s + L_{ds}) \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$$\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \begin{bmatrix} -R_b & 0 & 0 \\ 0 & -R_p & 0 \\ 0 & 0 & -(R_s + R_{out}) \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{G}_1 = \begin{bmatrix} V_{in}(t) & V_{in}(t) & 0 \end{bmatrix}', \quad \mathcal{G}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}'.$$

O problema de controle é enunciado a seguir.

Problema 1 *Suponha o posto da matriz $E_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ completo, $E_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz invertível, para todo $i \in \mathbb{K}$. Determinar uma estratégia de chaveamento $\sigma(t)$ para todo $t \geq 0$, tal que $\sigma(t)$ torne um ponto de equilíbrio $x_e \in \mathbb{R}^n$ de (4) globalmente estável, de modo que a equação $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_e$ se mantenha para qualquer condição inicial x_0 .*

Para desenvolver o sistema de controle proposto, a planta (4) será representada por meio de um modelo em espaços de estados utilizando os valores médios do ponto de equilíbrio x_e . Assim, suponha a existência de vetores constantes $x_e \in \mathbb{R}^n$ tal que (4) pode ser reescrita como se segue:

$$E_{\sigma(t)}\dot{x}(t) = \mathcal{H}_{\sigma(t)}\xi(t) + \mathcal{H}_{\sigma(t)}x_e + \mathcal{G}_{\sigma(t)}, \quad (6)$$

sendo $\xi(t) = x(t) - x_e$. Logo, uma solução para o Problema 1, considerando-se uma função de Lyapunov quadrática, é descrita no Teorema 1.

Observação 1 *No projeto de controle proposto, é utilizada uma função de Lyapunov quadrática devido ao fato de funções quadráticas serem independentes de parâmetros incertos da planta, permitindo a obtenção de condições de estabilidade, quando factíveis, para uma lei de controle linear ou não linear. No entanto, funções de Lyapunov quadráticas aumentam o conservadorismo do problema de controle.*

Teorema 1 *Considere o sistema descritor chaveado afim (4), tal que o posto da matriz $E_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é completo, $E_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ para todo $i \in \mathbb{K}$ é invertível e seja o ponto de equilíbrio*

$x_e \in \mathbb{R}^n$ dado. Se existir um vetor constante $\lambda \in \mathbb{R}^n$ e uma matriz simétrica positiva definida $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tais que

$$Q_i'P + PQ_i < 0, \quad (7)$$

$$\mathcal{H}_\lambda x_e + \mathcal{G}_\lambda = 0, \quad (8)$$

sendo $\mathcal{H}_\lambda = \sum_{i=1}^N \lambda_i \mathcal{H}_i$, $\mathcal{G}_\lambda = \sum_{i=1}^N \lambda_i \mathcal{G}_i$, λ_i uma constante real e positiva, tal que $\sum_{i=1}^N \lambda_i = 1$ e $Q_i = E_i^{-1} \mathcal{H}_i$, para todo $i \in \mathbb{K}$, então uma arbitrária e adequada estratégia de chaveamento $\sigma(t)$ torna o ponto de equilíbrio $x_e \in \mathbb{R}^n$ do sistema descritor chaveado afim (4) globalmente estável.

Prova 1 Considere a candidata a função quadrática de Lyapunov $V(\xi(t)) = \xi(t)'P\xi(t)$. Agora, de (6), (7) e $\xi(t) \neq 0$, segue que:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\xi(t)) &= \dot{x}(t)'P\xi(t) + \xi(t)'P\dot{x}(t) \\ &= 2\xi(t)'P(E_{\sigma(t)}^{-1} \mathcal{H}_{\sigma(t)} \xi(t) + E_{\sigma(t)}^{-1} \mathcal{H}_{\sigma(t)} x_e + E_{\sigma(t)}^{-1} \mathcal{G}_{\sigma(t)}) \\ &= \xi(t)'(Q_{\sigma(t)}'P + PQ_{\sigma(t)})\xi(t) + 2\xi(t)'P(E_{\sigma(t)}^{-1} \mathcal{H}_{\sigma(t)} x_e + E_{\sigma(t)}^{-1} \mathcal{G}_{\sigma(t)}) \\ &\leq -\varepsilon_1 \|\xi(t)\|^2 + \varepsilon_2 \|\xi(t)\|, \end{aligned} \quad (9)$$

sendo que $-\varepsilon_1 < 0$ denota o máximo autovalor de $(Q_i'P + PQ_i)$, $i \in \mathbb{K}$ e $\varepsilon_2 > 0$ representa o valor máximo de $\|E_i^{-1} \mathcal{H}_i x_e + E_i^{-1} \mathcal{G}_i\|$, $i \in \mathbb{K}$ sendo $\|\xi(t)\| = \sqrt{\xi(t)' \xi(t)}$. Logo, para uma adequada estratégia de chaveamento $\sigma(t)$, $t \geq 0$, e $\xi(x(t)) \neq 0$, então, $\dot{V}(\xi(t)) < 0$ se $\|\xi(t)\| > \varepsilon_2/\varepsilon_1$ e, assim, o sistema controlado é globalmente estável. A prova está completa.

Observação 2 É interessante notar que, para solucionar as condições relacionadas ao Teorema 1, é necessário determinar um vetor específico $\lambda \in \mathbb{R}^n$, o qual está associado a um ponto de equilíbrio conhecido $x_e \in \mathbb{R}^n$. Então, para um dado ponto de equilíbrio $x_e \in \mathbb{R}^n$, o associado vetor $\lambda \in \mathbb{R}^n$ é determinado. Este processo é ilustrado a seguir, no exemplo de aplicação.

3.1 Exemplo de Aplicação

Considere o circuito eletroestimulador proposto na Figura 1, e seja o modelo em espaço de estados do circuito proposto dado por (4) e definido pelas matrizes (5). O ponto de equilíbrio x_e do sistema (4) é definido como $x_e = [i_{be} \quad i_{pe} \quad i_{se}]'$. Logo, o conjunto de todos os pontos de equilíbrio alcançáveis do circuito eletroestimulador é calculado

considerando-se que:

$$x_e = \left\{ [i_{be} \quad i_{pe} \quad i_{se}]' : 0 \leq i_{be} \leq \frac{V_{in}}{R_b}, \quad 0 \leq i_{pe} \leq \frac{V_{in}}{R_p}, \quad i_{se} = 0 \right\}. \quad (10)$$

Neste contexto, considere os seguintes parâmetros nominais de projeto: $V_{in}(t) = 6V$, $L_b = 1,4mH$, $R_b = 1,5k\Omega$, $L_p = 3mH$, $L_{dp} = 754\mu H$, $R_p = 2,7\Omega$, $L_s = 2,6H$, $L_{ds} = 84,5mH$, $R_s = 202\Omega$, $R_{out} = 10k\Omega$, $N_1 = 12$, $N_2 = 127$. Adotando-se o seguinte valor de corrente na base do circuito eletroestimulador $i_{be} = 2,80mA$; então, de (8), $x_e = [2,80mA \quad 1,55A \quad 0A]'$, $\lambda_1 = 0,7$ e $\lambda_2 = 0,3$. Assim, do Teorema 1, obtém-se a seguinte matriz simétrica, com uma solução para o problema de controle proposto:

$$P = 10^{11} \times \begin{bmatrix} 0,0002 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0013 & -0,0788 \\ 0,0000 & -0,0788 & 5,1704 \end{bmatrix}, \quad (11)$$

Ela garante que, para uma adequada estratégia de chaveamento $\sigma(t)$, $t \geq 0$, o ponto de equilíbrio x_e do sistema controlado (4) é globalmente estável para $\|\xi(t)\| > \epsilon_2/\epsilon_1 = 1,27 \times 10^{-08}$. Agora, considere uma adequada estratégia de controle da chave $S_1(t) \in \{0, 1\}$, para todo $t \geq 0$, efetuada por um circuito gerador de pulsos elétricos, conforme ilustrado na Figura 2.

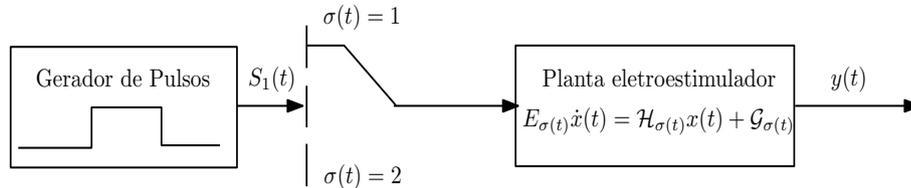


Figura 2 – Estratégia de chaveamento para o eletroestimulador proposto.

Ademais, observe que, para $S_1(t) = 1$ (*ON*), é adotado $\sigma(t) = 1$ e, conseqüentemente, para $S_1(t) = 0$ (*OFF*), é adotado $\sigma(t) = 2$, para todo $t \geq 0$. Então, da estratégia de chaveamento, $\sigma(t) \in \{1, 2\}$ é obtida através do circuito gerador de pulsos elétricos, conforme ilustrado na Figura 2. Adotando-se uma frequência de chaveamento $f = 30Hz$ e sendo definida a razão cíclica de operação da chave como $\lambda_1 = S_{1e} = 0,7$, obtém-se os seguintes resultados de simulação ilustrados nas Figuras 3 – 6.

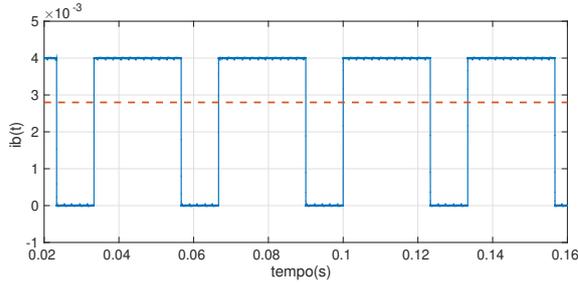


Figura 3 – (–) Corrente $i_b(t)$ e (– –) corrente i_{be} para $f = 30Hz$ e $\lambda_1 = 0,7$.

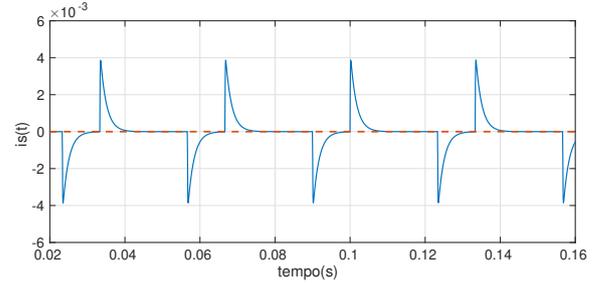


Figura 4 – (–) Corrente $i_s(t)$ e (– –) corrente i_{se} para $f = 30Hz$ e $\lambda_1 = 0,7$.

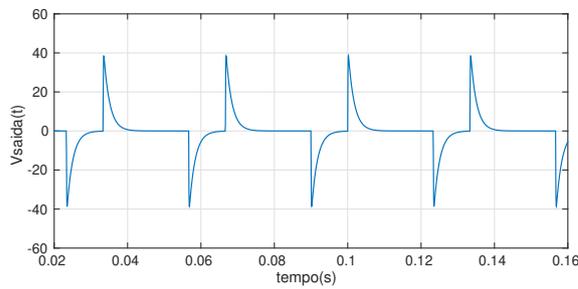


Figura 5 – Tensão na saída V_{out} para $f = 30Hz$ e $\lambda_1 = 0,7$.

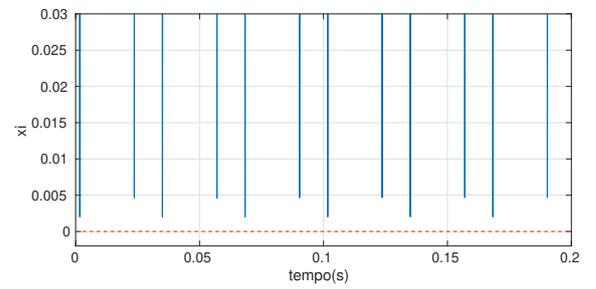


Figura 6 – (–) $\|\xi(t)\|$ e (– –) $\epsilon_2/\epsilon_1 = 1,27 \times 10^{-08}$ para $f = 30Hz$ e $\lambda_1 = 0,7$.

Seguindo, para os parâmetros de projeto definidos anteriormente, adotando-se o seguinte valor de corrente na base do circuito eletroestimulador $i_{be} = 2,0mA$, então, de (8), $x_e = [2,00mA \quad 1,11A \quad 0A]'$, $\lambda_1 = 0,5$ e $\lambda_2 = 0,5$. Do Teorema 1, obtêm-se a matriz simétrica positiva definida (11) como uma solução para o problema de controle proposto, a qual garante que, para uma adequada estratégia de chaveamento $\sigma(t)$, $t \geq 0$, o ponto de equilíbrio x_e do sistema controlado (4) é globalmente estável para $\|\xi(t)\| > \epsilon_2/\epsilon_1 = 2,11 \times 10^{-08}$. Adotando-se uma frequência de chaveamento $f = 50Hz$ e definindo-se a razão cíclica de operação da chave como sendo $\lambda_1 = S_{1e} = 0,5$, obtêm-se os seguintes resultados de simulação, ilustrados nas Figuras 7 – 10.

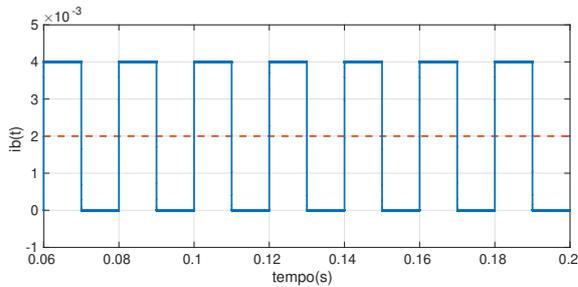


Figura 7 – (–) Corrente $i_b(t)$ e (– –) corrente i_{be} para $f = 50Hz$ e $\lambda_1 = 0,5$.

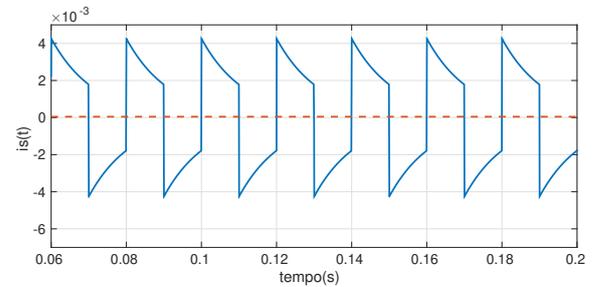


Figura 8 – (–) Corrente $i_s(t)$ e (– –) corrente i_{se} para $f = 50Hz$ e $\lambda_1 = 0,5$.

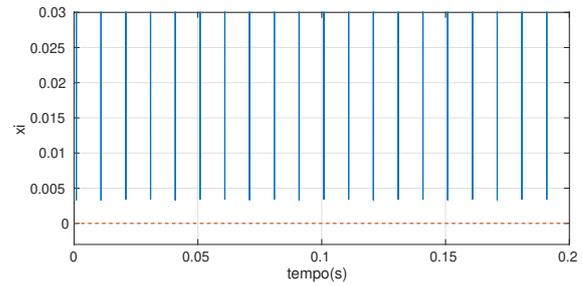
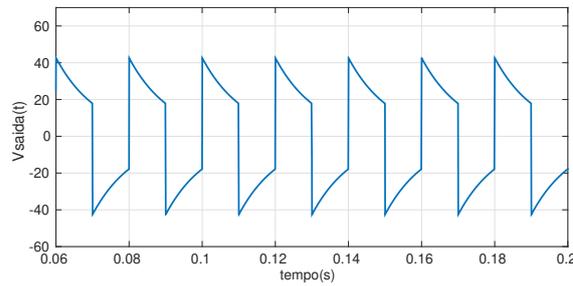


Figura 9 – Tensão na saída V_{out} para $f = 50Hz$ e $\lambda_1 = 0,5$. Figura 10 – (–) $\|\xi(t)\|$ e (– –) $\epsilon_2/\epsilon_1 = 2,11 \times 10^{-08}$ para $f = 50Hz$ e $\lambda_1 = 0,5$.

Nas Figuras 3 - 10, observe que o sistema é globalmente estável, conforme demonstrado pelo Teorema 1 para $\|\xi(t)\| > \epsilon_2/\epsilon_1$. Logo, as condições propostas são satisfeitas para a análise do sistema. Ademais, a frequência de saída é a mesma determinada pela estratégia de chaveamento $\sigma(t) \in \{1,2\}$. Dessa forma, pode-se limitar a frequência do sinal de saída do circuito a uma faixa de valores entre $20Hz$ e $60Hz$. A tensão máxima de saída ($V_{out}(t)$) é de, aproximadamente, $40V$, e a corrente máxima de saída ($i_s(t)$) é por volta de $4mA$. Na próxima seção, a implementação prática do presente método de controle do estimulador elétrico é apresentada.

4 Projeto de Implementação Prática

Para demonstrar a viabilidade do método proposto, um esquema elétrico equivalente para o circuito eletroestimulador representado na Figura 1 foi implementado. A estrutura do circuito eletroestimulador atuando com o sistema de controle é ilustrada na Figura 11.

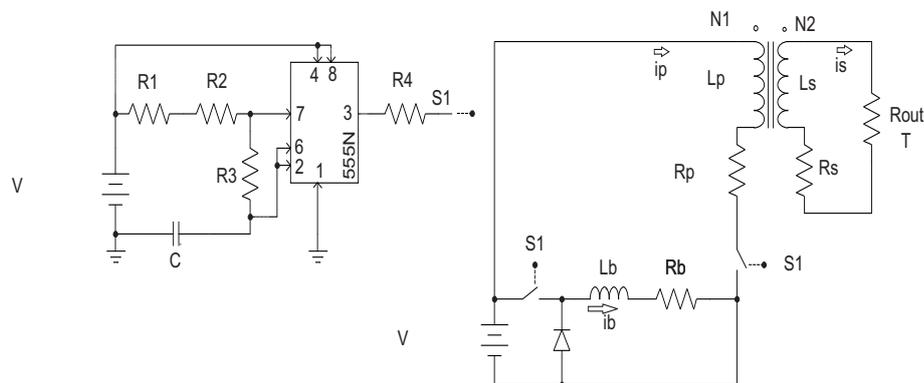


Figura 11 – Circuito de implementação para o circuito eletroestimulador.

A Figura 12 ilustra a estrutura do circuito eletroestimulador.

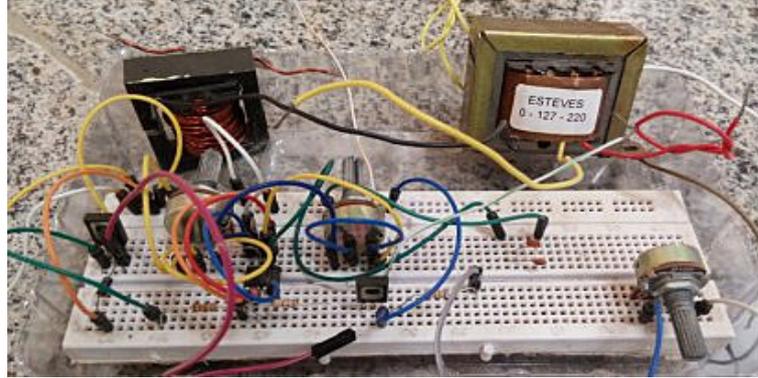


Figura 12 – Projeto de implementação do circuito eletroestimulador.

Observação 3 Note que o circuito de controle proposto pela Figura 11 apresenta um circuito integrado 555N em configuração estável (oscilador) (LIMA, 2010). Nesta configuração, tem-se que a saída do circuito integrado 555N é dada por um sinal pulsado. Assim, o circuito integrado 555N é responsável por gerar o sinal de controle $S_1(t) \in \{0,1\}$. Para maiores detalhes do funcionamento do circuito integrado 555N, veja Lima (2010). Ressalta-se, ainda, que as chaves $S_1(t) \in \{0,1\}$, utilizadas na montagem experimental, são transistores bipolares de junção. Ademais, o circuito de acionamento dos transistores foi efetuado através de corrente de base, lembrando que é necessário polarizá-lo em suas respectivas regiões de corte e saturação.

Definindo T_{on} como a duração do tempo de sinal alto e T_{off} como sendo a duração do tempo de sinal baixo, tem-se que a duração do tempo de sinal alto, a duração do tempo de sinal baixo e a razão cíclica de operação (λ_1), na saída do pino 3 do circuito integrado 555N, ilustrado na Figura 11, são descritas pelas seguintes formulações (MAINARDI JÚNIOR; FRIGO; FIDELIS, 2018):

$$\begin{cases} T_{on} = 0,7(R_1 + R_2 + R_3)C, \\ T_{off} = 0,7R_3C, \\ \lambda_1 = \frac{t_{on}}{T}. \end{cases} \quad (12)$$

De (12), note que, para um valor fixo de R_2 , tem-se que R_1 e R_3 são os responsáveis pela variação de T_{on} , e R_3 , pela variação de T_{off} para um dado valor de capacitor (C). Desse modo, definindo-se a frequência como F , tem-se de (12):

$$F = \frac{1}{T_{on} + T_{off}} = \frac{1}{0,7(R_1 + R_2 + 2R_3)C} = \frac{1,428}{(R_1 + R_2 + 2R_3)C}. \quad (13)$$

Logo, de (13) e definindo $R_1 \in [R_{11} \ R_{12}]$, sendo R_{11} o valor mínimo e R_{12} o valor máximo de resistência alcançável pelo potenciômetro R_1 e $R_3 \in [R_{31} \ R_{32}]$, sendo R_{31} o valor

mínimo e R_{32} o valor máximo de resistência alcançável pelo potenciômetro R_3 , respectivamente, tem-se que o intervalo de valores de frequência alcançável pelo circuito eletroestimulador proposto na Figura 11 é dado por (MAINARDI JÚNIOR; FRIGO; FIDELIS, 2018):

$$\frac{1,428}{(R_{12} + R_2 + 2R_{32})C} \leq F \leq \frac{1,428}{(R_{11} + R_2 + 2R_{31})C}. \quad (14)$$

Para análise do circuito, suponha os mesmos valores de parâmetros de projeto definidos anteriormente, e $R_1 = [0k\Omega \ 500k\Omega]$, $R_2 = 3,3k\Omega$, $R_3 = [0k\Omega \ 400k\Omega]$, $R_4 = 1,5k\Omega$ e $C = 47nF$. Então, para $x_e = [2,80mA \ 1,55A \ 0A]'$, de (12), adotando-se $R_1 = 401,86k\Omega$ e $R_3 = 303,95k\Omega$, obtêm-se: $T_{on} = 23,33ms$, $T_{off} = 10ms$, $F = 30Hz$ e $\lambda_1 = 0,7$. As Figuras 13 – 16 ilustram os resultados experimentais para o circuito eletroestimulador proposto na Figura 11.

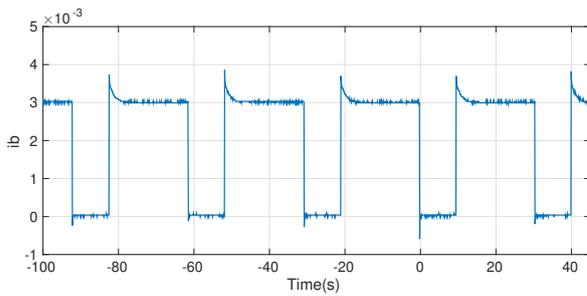


Figura 13 – Corrente $i_b(t)$ $f = 30Hz$ e $\lambda_1 = 0,7$.

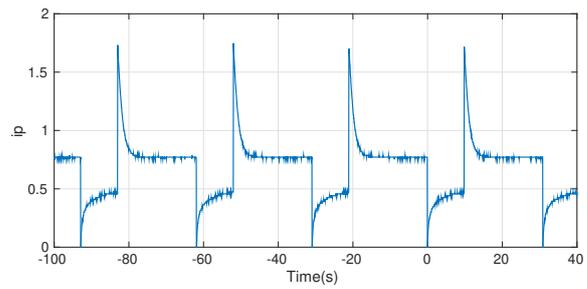


Figura 14 – Corrente $i_p(t)$ para $f = 30Hz$ e $\lambda_1 = 0,7$.

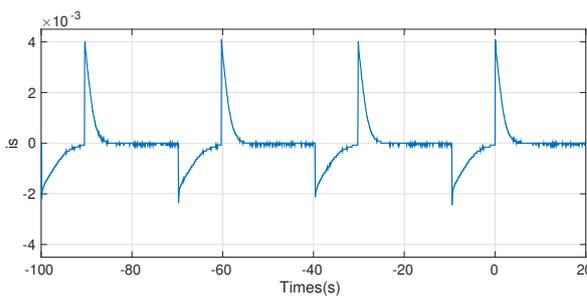


Figura 15 – Corrente $i_s(t)$ para $f = 30Hz$ e $\lambda_1 = 0,7$.

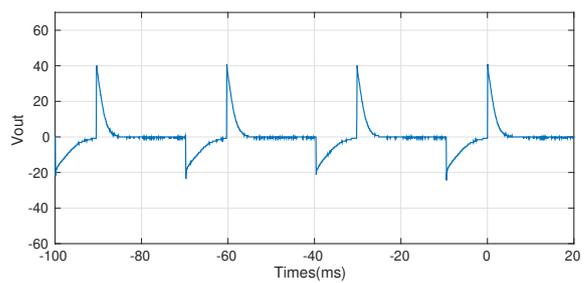


Figura 16 – Tensão V_{out} para $f = 30Hz$ e $\lambda_1 = 0,7$.

Agora, para $x_e = [2,00mA \ 1,11A \ 0A]'$, adotando-se $R_1 = 0k\Omega$, $R_2 = 3,3k\Omega$, $R_3 = 300k\Omega$, $R_4 = 1,5k\Omega$ e $C = 47nF$, note que, de (12), obtêm-se: $T_{on} = 9,98ms$, $T_{off} = 9,87ms$, $F = 50Hz$ e $\lambda_1 = 0,5$. As Figuras 17 – 20 ilustram os resultados experimentais para o circuito eletroestimulador proposto na Figura 11.

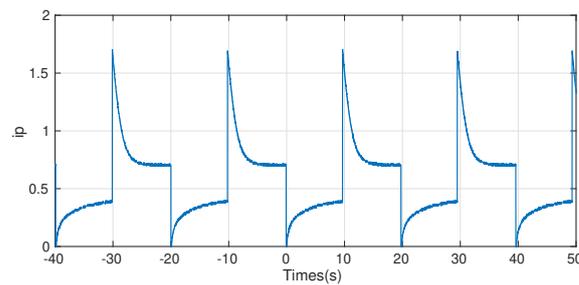
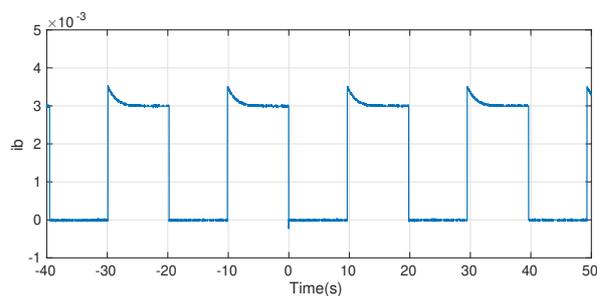


Figura 17 – Corrente $i_b(t)$ para $f = 50Hz$ e $\lambda_1 = 0,5$. Figura 18 – Corrente $i_p(t)$ para $f = 50Hz$ e $\lambda_1 = 0,5$.

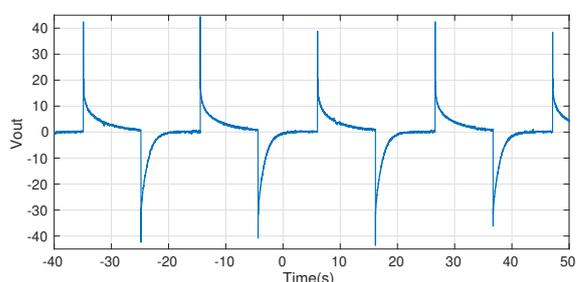
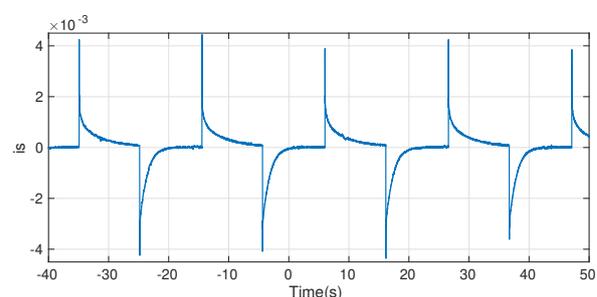


Figura 19 – Corrente $i_s(t)$ para $f = 50Hz$ e $\lambda_1 = 0,5$. Figura 20 – Tensão V_{out} para $f = 50Hz$ e $\lambda_1 = 0,5$.

Observe que as Figuras 13, 14, 15, 17, 18 e 19 apresentam oscilações agudas de tensão quando comparadas com as Figuras 3, 4, 5, 7, 8 e 9, provenientes do sinal de saída do circuito integrado 555N, o qual apresenta características de um sinal retangular pulsado. Logo, as transições rápidas que ocorrem no sinal de saída do circuito integrado 555N induzem tensões elevadas no circuito do transformador, as quais são amplificadas devido à relação de transformação. Contudo, destaca-se que os resultados ilustrados nas Figuras (13)-(20) estão de acordo com os resultados de simulação apresentados nas Figuras (3)-(10). Assim, ressalta-se que o sistema de controle para o circuito eletroestimulador proposto cumpre com os objetivos estabelecidos no processo de forma adequada.

5 Conclusão

Neste trabalho, foi proposto um método de projeto de controle para sistemas chaveados descritores afins contínuos no tempo. Desse modo, inicialmente, sugeriu-se a modelagem em espaço de estados de um circuito eletroestimulador, o qual pode ser representado como um sistema chaveado descritor afim. Posteriormente, o projeto de controle foi desenvolvido com base em funções quadráticas de Lyapunov e LMIs. Foi proposto o Teorema 1, no qual se obteve uma solução para o problema de controle sugerido, garantindo que, para uma adequada estratégia de chaveamento, o ponto de equilíbrio do sistema controlado é

globalmente estável para $\|\xi(t)\| > \varepsilon_2/\varepsilon_1$. Ademais, destaca-se que a técnica de controle desenvolvida e aplicada no controle de um circuito eletroestimulador fornece resultados adequados de frequência, tensão e corrente elétrica na saída do circuito, permitindo a estimulação de músculos com uma tensão máxima de $40V$, corrente elétrica máxima de $4mA$ e frequência do sinal ajustável em uma faixa de valores entre $20Hz$ e $60Hz$. Os resultados experimentais ilustram os sinais de corrente e tensão obtidos, evidenciando o desempenho adequado do sistema, bem como a validação do procedimento de projeto proposto. Como proposta para pesquisas futuras, os autores destacam o estudo e a adequação do dispositivo a um controle em malha fechada. Igualmente, para fins de desenvolvimento e aprimoramento, propõe-se a alteração do circuito integrado $555N$ para outro circuito microcontrolado.

REFERÊNCIAS

- AMARAL, F. M.; ALBERTO, L. F. C. Bifurcações Sela-Nó da Região de Estabilidade de Sistemas Dinâmicos Autônomos não Lineares. **TEMA (São Carlos)**, scielo, v. 17, p. 71 – 80, 04 2016.
- BOLZERN, P.; SPINELLI, W. Quadratic stabilization of a switched affine system about a nonequilibrium point. In: **American Control Conference, 2004. Proceedings of the 2004**. [S.l.: s.n.], 2004. v. 5, p. 3890 –3895.
- BOYD, S. et al. **Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory**. 2nd. ed. [S.l.]: SIAM Studies in Applied Mathematics, 1994. 193 p. (Studies in Applied Mathematics, 15).
- CARDIM, R. et al. Variable-structure control design of switched systems with an application to a dc-dc power converter. **IEEE Trans. Ind. Electronics**, v. 56, n. 9, p. 3505 –3513, sept. 2009.
- _____. Variable-structure control design of switched systems with an application to a DC-DC power converter. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, v. 56, n. 9, p. 3505–3513, sept 2009.
- CARNIATO, L. A. et al. Output control of continuous-time uncertain switched linear systems via switched static output feedback. **International Journal of Control**, Taylor & Francis, v. 0, n. 0, p. 1–20, 2018.
- DEAECTO, G. et al. Switched affine systems control design with application to dc-dc converters. **IET Control Theory & Appl.**, IET, v. 4, n. 7, p. 1201–1210, 2010.

FARIA, C. U. **Implementação de um sistema de geração de marcha para pacientes com lesões medulares**. 2006. Dissertação (Tese) — Universidade Estadual Paulista, São Paulo, 2006.

GAHINET, P. et al. LMI control toolbox - for use with matlab. 1995.

GEDDES, L. The first stimulators. **IEEE engineering in medicine and biology magazine**, Piscataway, v. 13, p. 532–532, 1994.

GRILLO, D. E.; SIMÕES, A. C. Atividade física convencional (musculação) e aparelho eletroestimulador: um estudo da contração muscular. Estimulação elétrica: mito ou verdade? **Revista Mackenzie de Educação Física e Esporte**, v. 2, p. 31–43, 2003.

HE, Y.; XU, W.; CHENG, Y. A Novel Scheme for Sliding-Mode Control of DC-DC Converters with a Constant Frequency Based on the Averaging Model. **Journal of Power Electronics**, KOREAN INST POWER ELECTRONICS, RM 408, KOREA SCIENCE & TECHNOLOGY BLDG, 635-4, YEOKSAM-DONG, KANGNAM-GU, SEOUL, 135-703, SOUTH KOREA, 10, n. 1, p. 1–8, JAN 2010.

JUNQUEIRA, M. V. N. et al. Desenvolvimento de um eletroestimulador funcional de oito canais para aplicação com malha de realimentação utilizando controlador digital. **SBAI**, 2013.

KRUEGER, E. et al. Efeitos da estimulação elétrica funcional no controle neuromuscular artificial. **Revista Neurociências**, v. 18, p. 01–11, 10 2010.

LIMA, C. B. de. O temporizador 555. v. 2, p. 97 – 106, 2010.

MAINARDI JÚNIOR, E. I.; FRIGO, M. M.; FIDELIS, B. T. Implementação de um estimulador elétrico com via circuito integrado 555N. **ForSCIENCE**, v. 6, n. 1, 2018.

MAINARDI JÚNIOR, E. I. et al. Robust control of switched linear systems with output switching strategy. **Journal of Control, Automation and Electrical Systems**, v. 26, n. 5, p. 455–465, Oct 2015.

MAZUMDER, S.; NAYFEH, A.; BOROJEVIC, D. Robust control of parallel DC-DC buck converters by combining integral-variable-structure and multiple-sliding-surface control schemes. **IEEE Trans. on Power Electron.**, IEEE-INST ELECTRICAL ELECTRONICS ENGINEERS INC, 445 HOES LANE, PISCATAWAY, NJ 08855-4141 USA, 17, n. 3, p. 428–437, MAY 2002.

PFEIFER, A. A.; LOBATO, F. S. Controle ótimo de sistemas algébrico-diferenciais chaveados usando o algoritmo de busca gravitacional. **TEMA (São Carlos)**, scielo, v. 14, p. 81 – 94, 04 2013.

RODRIGUEZ, J. E. B. **Estimulador Elétrico Funcional com utilização de Ponte H e Fonte de Corrente no estágio de Potencia**. 2016. Dissertação (Tese) — Universidade Estadual Paulista, São Paulo, 2016.

SILVA, R. C. **Eletromiografia de superfície: função neuromuscular e reprodutibilidade do método: uma revisão.** 2010. 36 f. Dissertação (Monografia) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2010.

STAUDT, T. **Estudo de transformadores de corrente utilizados em instrumentação.** 2009. 138 p. Dissertação (Dissertação) — Universidade Federal de Santa Catarina, Santa Catarina, 2009.

VELLOSO, J. B. **Estimulador elétrico muscular programável.** 2005. 77 p. Dissertação (Monografia) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2005.

XIAO, M.; ZHAI, G.; HUANG, C. Quadratic stabilisation of switched affine systems. **Journal of Control and Decision**, Taylor & Francis, v. 7, n. 1, p. 1–23, 2020.

YOSHIMURA, V. L. et al. Observer-Based Control Design for Switched Affine Systems and Applications to DC–DC Converters. **Journal of Control, Automation and Electrical Systems**, Springer US, v. 24, n. 4, p. 535–543, may 2013.

ZHAI, G. et al. Quadratic stabilization of uncertain switched affine systems: An observer-based approach. In: **2018 57th Annual Conference of the Society of Instrument and Control Engineers of Japan (SICE)**. [S.l.: s.n.], 2018. p. 362–367.

DADOS DOS AUTORES

Nome: Edson Italo Mainardi Júnior

E-mail: edson.mainardi@ifms.edu.br

Lattes: <http://lattes.cnpq.br/9424029189143802>

Edson Italo Mainardi Júnior é Engenheiro Eletricista formado pela Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" no ano de 2009. É Doutor em Engenharia Elétrica (2013) pela mesma instituição. Atualmente é professor do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Mato Grosso do Sul - Campus Três Lagoas (IFMS). Tem experiência na área de Engenharia Elétrica, com ênfase em Eletrônica Industrial e Teoria de Controle, atuando principalmente em temas envolvendo Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs), Sistemas Chaveados, Controle com modelos fuzzy Takagi-Sugeno, Controle Linear e não Linear.

Nome: Diogo Ramalho de Oliveira

E-mail: diogo.ramalho@ifms.edu.br

Lattes: <http://lattes.cnpq.br/7193991173784133>

Possui Graduação (2012), Doutorado (2017) e Pós-Doutorado (2020) em Engenharia Elétrica pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira (UNESP/FEIS). Atualmente é Professor e Coordenador de Pesquisa e Inovação do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Mato Grosso do Sul (IFMS) - Campus Três Lagoas. Tem experiência na área de Engenharia Elétrica, com ênfase em Teoria de Controle, atuando principalmente em temas envolvendo Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs), Controle Linear e Controle Não Linear.

Nome: Lucas Rangel de Oliveira

E-mail: lucas.rangel@ifms.edu.br

Lattes: <http://lattes.cnpq.br/1147787931799094>

Possui graduação (2013), mestrado (2015) e doutorado (2019) em Engenharia Mecânica pela Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Atualmente é professor EBTT no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso do Sul - IFMS - Campus Três Lagoas. Tem experiência na área de engenharia mecânica, com ênfase em Mecânica dos Sólidos, atuando principalmente nos seguintes temas: vibrações mecânicas, detecção de falhas, dinâmica de rotação e controle de sistemas mecânicos.

Nome: Estélio da Silva Amorim

E-mail: estelio.amorim@ifms.edu.br

Lattes: <http://lattes.cnpq.br/6634076230860854>

Possui graduação em Engenharia Elétrica pela Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (2004), mestrado em Engenharia Elétrica pela Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira da Universidade Estadual Paulista - DEE/FEIS/UNESP (2011), Especialização em Engenharia de Segurança no Trabalho pela União das Faculdades dos Grandes Lagos, UNILAGO (2013). Atualmente é docente do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso do Sul, IFMS - Campus Três Lagoas. Tem experiência na área de Engenharia Elétrica, atuando principalmente na área de Eficiência Energética.

Nome: Marcelo Minhoto Carvalho Teixeira

E-mail: marcelo.minhoto@unesp.br

Lattes: <http://lattes.cnpq.br/8879964582778840>

Possui graduação em Engenharia Elétrica pela Escola de Engenharia de Lins (1979), mestrado em Engenharia Elétrica pela Universidade Federal do Rio de Janeiro (1982) e doutorado em Engenharia Elétrica pela Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (1989). Adicionalmente, fez um estágio de Pós-doutoramento na Purdue University, nos Estados Unidos, em 1996 e 1997. É Professor Titular do Departamento de Engenharia Elétrica da Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira (FEIS) da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (UNESP), onde atua desde 1982, inicialmente na função de Professor Assistente, passando para Professor Assistente Doutor em 1989, para Professor Adjunto (concurso de Livre-docência) em 1995 e para Professor Titular (concurso) em 2005. Foi Coordenador (08-2005 a 05-2007) e Vice-Coordenador do (06-2000 a 07-2005 e 06-2007 a 05-2010) do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da FEIS-UNESP. Atuou como membro da Comissão de Avaliação de Cursos de Pós-Graduação da Área de Engenharias IV da CAPES (2009 a 2013). Foi Coordenador do Comitê de Programas do XVIII Congresso Brasileiro de Automática (CBA2010, 12-16.09.2010, Bonito-MS). Adicionalmente, foi Coordenador (11-1991 a 10-1993) e Vice-Coordenador (11-1989 a 10-1991 e de 11-1993 a 06-1995) do Curso de Graduação em Engenharia Elétrica da FEIS-UNESP e Vice-Chefe do Departamento de Engenharia Elétrica da FEIS-UNESP (05-1989 a 04-1991). Atuou como Editor Associado do IEEE Transactions on Fuzzy Systems (2016 a 2020). Tem experiência na área de Engenharia Elétrica, com ênfase em Teoria de Sistemas de Controle e Automação, atuando principalmente nos seguintes temas: controle com modelos fuzzy Takagi-Sugeno, LMIs, controle com estrutura variável, controle adaptativo, controle não linear, controle com redes neurais, controle linear, controle clássico e aplicações de controle automático.