DOI: http://dx.doi.org/10.29069/forscience.2016v4n2.e156

ForSCIENCE

SOLUÇÕES EXATAS DE EDO's DE PRIMEIRA ORDEM VIA SIMETRIAS DE LIE[1]

Valter Aparecido Silva Junior[2]

RESUMO

Existem várias técnicas engenhosas para obter soluções exatas de uma equação diferencial ordinária (EDO). Surpreendentemente, elas são, em sua maioria, casos especiais de métodos mais gerais baseados na invariância da equação sob grupos de simetrias. Neste artigo, será apresentado um desses métodos tendo em vista, particularmente, EDO's de primeira ordem.

Palavras-chave: Simetrias de Lie. EDO's de primeira ordem. Soluções exatas.

1 INTRODUÇÃO

Sophus Lie (1842-1899), um notável matemático norueguês, introduziu, na segunda metade do século XIX, a noção de grupos de simetrias com o objetivo de unificar e estender os vários métodos de se obter soluções para uma equação diferencial. Suas idéias culminaram com o surgimento de uma nova vertente na matemática: a grupo-análise. Após um período de esquecimento, a teoria de Lie tem sido, nas últimas décadas, aplicada de forma bem sucedida no estudo de equações que modelam, sobretudo, fenômenos naturais (IBRAGIMOV, 1985; SATTINGER; WEAVER, 1986). De fato, a maioria dos modelos físicos são ricos em simetrias que podem descritas pelos grupos de Lie.

Segundo Bluman e Kumei (1989), "um grupo de simetrias de uma equação diferencial é um grupo de transformações que levam soluções em outras soluções", deixando-a, portanto, invariante. Lie considerou apenas transformações pontuais uniparamétricas, dependentes continuamente de um parâmetro real ε, hoje conhecidas como simetrias de Lie.

Determinar as simetrias de uma equação diferencial pode ser uma tarefa bastante complicada. Porém, as simetrias de Lie, que podem ser identificadas por seus *geradores infinitesimais* X, são calculadas metodicamente por meio de um algoritmo. Conforme será visto, a partir de uma *condição de simetria linearizada*, obtém-se um sistema sobredeterminado de equações diferenciais parciais (EDP's) lineares, chamadas de *equações determinantes*, que, se resolvidas, fornecerão os coeficientes de X. As próximas seções (de 2 a 6), longe de exaustivas, trarão a

[1] **Como citar este artigo:**
SILVA JUNIOR, V. A. Soluções exatas de EDO's de primeira ordem via simetrias de Lie. **ForScience: revista científica do IFMG**, Formiga, v. 4, n. 2, e00156, jul./dez. 2016.

[2] Professor do IFSP. Doutorando em Física, Mestre em Matemática Aplicada, Licenciado em Matemática e Física e Bacharel em Física, todos pela UNICAMP. E-mail: valtersjunior@gmail.com.

teoria estritamente necessária para o desenvolvimento da Seção 7, onde será mostrado, em um exemplo, como aplicar a Teoria de Lie para a obtenção de soluções exatas de equações diferenciais ordinárias (EDO's) de primeira ordem. Mais detalhes sobre essa teoria podem ser obtidos nas referências utilizadas na elaboração desse trabalho (IBRAGIMOV, 1985; SATTINGER; WEAVER, 1986; BLUMAN; KUMEI, 1989; HYDON, 2000; OLVER, 1986; STEPHANI; MACCALLUM, 1989).

2 PRIMEIRAS DEFINIÇÕES

Consideremos, por simplicidade, EDO's do tipo

$$y^{(n)} = \omega(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \tag{1}$$

onde $y = y(x)$, e assumamos ω uma função suave.

Definição 2.1 *Uma transformação inversível* $\Gamma : (x,y) \to (\hat{x}(x,y), \hat{y}(x,y))$ *é uma simetria da Eq.* (1) *se deixar a EDO invariante,*

$$\left[\hat{y}^{(n)} = \omega(\hat{x}, \hat{y}, \hat{y}', \ldots, \hat{y}^{(n-1)})\right]\Big|_{(1)}. \tag{2}$$

Cada derivada $\hat{y}^{(k)}$ acima é calculada recursivamente,

$$\hat{y}^{(k)} = \frac{d\hat{y}^{(k-1)}}{d\hat{x}} = \frac{D_x \hat{y}^{(k-1)}}{D_x \hat{x}}, \text{ com } \hat{y}^{(0)} \equiv \hat{y},$$

onde D_x, o operador derivada total em x, é dado por $D_x = \partial_x + y'\partial_y + y''\partial_{y'} + \cdots$.

Exemplo 2.1 *Para EDO's de primeira ordem, a condição de simetria da Eq.* (2) *é*

$$\frac{\hat{y}_x + \omega(x,y)\hat{y}_y}{\hat{x}_x + \omega(x,y)\hat{x}_y} = \omega(\hat{x}, \hat{y}).$$

Claramente, a reflexão

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (x, -y) \tag{3}$$

é uma simetria de

$$y' = 0. \tag{4}$$

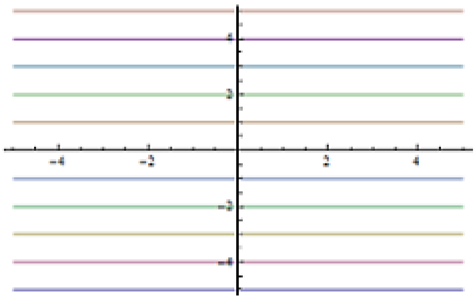

Figura 1 - Algumas soluções de $y' = 0$.

Qualquer simetria deve necessariamente levar solução em solução. Mais formalmente, a condição de simetria da Eq. (2) exige que o conjunto das curvas-soluções de uma EDO no plano (x,y) seja idêntico ao seu conjunto-imagem no plano $(\hat{x},\hat{y})$.

No exemplo anterior, a solução geral da Eq. (4) é $y = c$, que são retas horizontais preenchendo o plano (x,y). Além da reflexão na Eq. (3), várias outras simetrias são admitidas pela Eq. (4), algumas bastante óbvias a partir da Fig. 1. Dentre elas, as translações

$$(\hat{x},\hat{y}) = (x, y+\varepsilon), \text{ com } \varepsilon \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Definição 2.2 *Seja G um conjunto de simetrias $\Gamma_\varepsilon : (x,y) \to (\hat{x}(x,y;\varepsilon), \hat{y}(x,y;\varepsilon))$ dependentes de ε, um parâmetro real. Denotemos por $\circ$ a operação de composição. Se existir uma vizinhança V_0 de zero tal que, para todo $\varepsilon \in V_0$,*

(L_1) *Γ_0 é a simetria trivial, isto é, $(\hat{x},\hat{y})|_{\varepsilon=0} = (x,y)$,*
(L_2) *Γ_ε é uma simetria,*
(L_3) *$\Gamma_\varepsilon \circ \Gamma_\delta = \Gamma_{\varepsilon+\delta}$, $\forall \delta \in V_0$,*
(L_4) *Γ_ε é analítica, ou seja, valem as expansões*

$$\hat{x} = x + \varepsilon\xi + O(\varepsilon^2), \tag{6}$$
$$\hat{y} = y + \varepsilon\eta + O(\varepsilon^2), \tag{7}$$

onde

$$\xi = \xi(x,y) = \left.\frac{d\hat{x}}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}, \ \eta = \eta(x,y) = \left.\frac{d\hat{y}}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}, \tag{8}$$

dizemos, então, que $(G,\circ)$ é um grupo de Lie e, aos elementos de G, damos o nome de simetrias de Lie.

Na definição anterior, os axiomas de grupo são satisfeitos para todo ε suficientemente próximo de zero. Em particular, da condição (L_3), obtemos $\Gamma_\varepsilon^{-1} = \Gamma_{-\varepsilon}$.

Exemplo 2.2 *As translações da Eq.* (5) *são simetrias de Lie da Eq.* (4). *Também, as rotações*

$$(\hat{x},\hat{y}) = (x\cos\varepsilon - y\sin\varepsilon, x\sin\varepsilon + y\cos\varepsilon), \text{ com } \varepsilon \in (-\pi,\pi], \tag{9}$$

assim como as dilatações

$$(\hat{x},\hat{y}) = (e^{\alpha\varepsilon}x, e^{\varepsilon}y), \text{ com } \varepsilon \in \mathbb{R}, \tag{10}$$

onde α *é um número real fixado, são simetrias de Lie de* $y' = y/x$.

3 GERADOR DE SIMETRIAS

Consideremos o operador diferencial

$$X = \xi\partial_x + \eta\partial_y, \tag{11}$$

onde ξ e η são os mesmos coeficientes definidos pela Eq. (8). Dada uma função suave arbitrária $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, é fácil mostrar que

$$X^k F(x,y) = \left.\frac{d^k F(\hat{x},\hat{y})}{d\varepsilon^k}\right|_{\varepsilon=0}.$$

Segue, pois, da expansão de F,

$$F(\hat{x},\hat{y}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!}\left[\left.\frac{d^k F(\hat{x},\hat{y})}{d\varepsilon^k}\right|_{\varepsilon=0}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} X^k F(x,y) = e^{\varepsilon X} F(x,y).$$

Em particular, dado X, as correspondentes simetrias de Lie de uma EDO podem ser reconstruídas da seguinte maneira

$$(\hat{x},\hat{y}) = (e^{\varepsilon X}x, e^{\varepsilon X}y),$$

algo que motiva a próxima definição.

Definição 3.1 *A operadores como na Eq.* (11), *damos o nome de gerador infinitesimal de simetrias de Lie.*

Exemplo 3.1 *Para as translações da Eq.* (5), *temos que*

$$\left.\frac{d\hat{x}}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0, \ \left.\frac{d\hat{y}}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 1.$$

Portanto, tais simetrias são geradas por $X = \partial_y$.

Exemplo 3.2 *Da mesma maneira,*

$$X = -y\partial_x + x\partial_y \tag{12}$$

gera as rotações da Eq. (9)*, enquanto que*

$$X = \alpha x\partial_x + y\partial_y \tag{13}$$

gera as dilatações da Eq. (10).

4 COORDENADAS CANÔNICAS

Na Eq. (11), há uma referência explícita às coordenadas x e y nas quais uma EDO é originalmente escrita. Investigamos aqui como as componentes ξ e η de um gerador de simetrias X são modificadas quando substituímos x e y por novas coordenadas $t(x,y)$ e $u(x,y)$.

Dada novamente uma função suave arbitrária $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, tem-se, pela regra da cadeia,

$$\begin{aligned}
XF(t,u) &= \xi F_x(t,u) + \eta F_y(t,u) \\
&= \xi[t_x F_t(t,u) + u_x F_u(t,u)] + \eta[t_y F_t(u,v) + u_y F_u(t,u)] \\
&= (\xi t_x + \eta t_y)F_t(t,u) + (\xi u_x + \eta u_y)F_u(t,u) \\
&= (Xt)F_t(t,u) + (Xu)F_u(t,u) \\
&= [(Xt)\partial_t + (Xu)\partial_u]F(t,u).
\end{aligned}$$

E justamente porque F é uma função arbirária, temos $X = (Xt)\partial_t + (Xu)\partial_u$.

Exemplo 4.1 *Nas coordenadas polares* $r = \sqrt{x^2+y^2}$ *e* $\phi = \arctan(y/x)$*, o gerador de simetrias da Eq.* (12) *é dado por* $X = \partial_\phi$*, pois,* $Xr = 0$ *e* $X\phi = 1$*. Ou seja, as rotações da Eq.* (9)*, nas novas coordenadas, não são senão translações em* ϕ*.*

Obviamente, coordenadas polares são as mais adequadas para descrever rotações. Dessa constatação simples, surge a pergunta: para todo $X = \xi\partial_x + \eta\partial_y \neq 0$, sempre existem coordenadas não-degeneradas $r(x,y)$ e $s(x,y)$, ditas canônicas, tais que $X = \partial_s$? A resposta é sim. Para tanto, basta que tenhamos

$$Xr = 0, Xs = 1. \tag{14}$$

Coordenadas canônicas podem ser obtidas a partir da Eq. (14) pelo método das características.

i) Como $Xr = 0$, temos que $\xi r_x + \eta r_y = 0$.

i-a) Se $\xi = 0$, então, $r_y = 0$. Tomando, portanto, r tal que $r = r(x)$, obtemos $Xr = 0$.

i-b) Se $\xi \neq 0$, então,

$$r_x + \frac{\eta}{\xi} r_y = 0,$$

ou ainda, $D_x r = 0$, quando $y' = \eta/\xi$. Tomando, portanto, r tal que $r(x,y) = c$ é solução geral de

$$y' = \frac{\eta(x,y)}{\xi(x,y)},$$

obtemos $Xr = 0$. Em ambos os casos, (i-a) e (i-b), dizemos simplesmente que r é uma primeira integral de

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta}.$$

ii) Como $Xs = 1$, temos que $\xi s_x + \eta s_y = 1$, e, portanto,

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = ds.$$

Calculado r, o cálculo de s se reduz a uma quadratura. De fato,

ii-a) se $\xi \neq 0$, então,

$$s = \int^{r(x,y)} \frac{dx}{\xi\,(x, y(x,r))};$$

ii-b) se $\eta \neq 0$, então,

$$s = \int^{r(x,y)} \frac{dy}{\eta\,(x(r,y), y)}.$$

Em ambos os casos, (ii-a) e (ii-b), r é tratado como uma constante.

Exemplo 4.2 *O gerador de simetrias da Eq.* (13) *é tal que* $\xi = \alpha x$ *e* $\eta = y$. *Se* $\alpha = 0$, *uma possibilidade é tomarmos* $r = x$. *Do contrário, se* $\alpha \neq 0$, *sabendo que* $y = cx^{1/\alpha}$ *é solução geral de*

$$y' = \frac{y}{\alpha x},$$

uma possibilidade é tomarmos $r = xy^{-\alpha}$.

Como η *é independente de* x, *por simplicidade, tomemos*

$$s = \int \frac{dy}{y} = \ln|y| + c.$$

Façamos, em particular, $c = 0$. *Portanto,*

$$(r,s) = (xy^{-\alpha}, \ln|y|),\ \forall\alpha,$$

são coordenadas canônicas do gerador de simetrias da Eq. (13).

5 CONDIÇAO DE SIMETRIA LINEARIZADA

Para muitas EDO's, a condição de simetria da Eq. (2) é não-linear. Simetrias de Lie podem, no entanto, ser determinadas a partir de uma condição mais simples.

Das expansões da Eq. (6) e da Eq. (7), segue que

$$\hat{y}^{(k)} = y^{(k)} + \varepsilon\eta^{(k)} + O(\varepsilon^2),$$

onde

$$\eta^{(k)} = D_x\eta^{(k-1)} - y^{(k)}D_x\xi, \text{ com } \eta^{(0)} \equiv \eta. \tag{15}$$

Isso posto, da diferenciação, em ε, da Eq. (2), obtemos

$$\left[\frac{d\hat{y}^{(n)}}{d\varepsilon} = \omega_{\hat{x}}\frac{d\hat{x}}{d\varepsilon} + \omega_{\hat{y}}\frac{d\hat{y}}{d\varepsilon} + \omega_{\hat{y}'}\frac{d\hat{y}'}{d\varepsilon} + \cdots + \omega_{\hat{y}^{(n-1)}}\frac{d\hat{y}^{(n-1)}}{d\varepsilon}\right]\Bigg|_{(1)},$$

ou ainda,

$$\left[\eta^{(n)} + O(\varepsilon) = \xi\omega_{\hat{x}} + \eta\omega_{\hat{y}} + \eta^{(1)}\omega_{\hat{y}'} + \cdots + \eta^{(n-1)}\omega_{\hat{y}^{(n-1)}} + O(\varepsilon)\right]\Big|_{(1)},$$

uma equação que deve ser necessariamente satisfeita em $\varepsilon = 0$. Logo,

$$\left[\eta^{(n)} = \xi\omega_x + \eta\omega_y + \eta^{(1)}\omega_{y'} + \cdots + \eta^{(n-1)}\omega_{y^{(n-1)}}\right]\Big|_{(1)}.$$

É conveniente introduzir aqui o gerador de simetrias prolongado,

$$X^{(n)} = \xi\partial_x + \eta\partial_y + \eta^{(1)}\partial_{y'} + \cdots + \eta^{(n)}\partial_{y^{(n)}}.$$

Assim, a Eq. (1) admite simetrias de Lie geradas por X se, e somente se,

$$X^{(n)}\Delta\Big|_{\Delta=0} = 0, \tag{16}$$

que é a versão linearizada da Eq. (2), onde $\Delta = y^{(n)} - \omega(x,y,y',\ldots,y^{(n)})$.

Doravante, dedicaremos especial atenção a EDO's de primeira ordem.

6 CÁLCULO DAS SIMETRIAS DE LIE

Calculado o coeficiente $\eta^{(1)}$ a partir da Eq. (15),

$$\eta^{(1)} = \eta_x + (\eta_y - \xi_x)y' - \xi_y y'^2, \tag{17}$$

para EDO's de primeira ordem, a condição de simetria da Eq. (16) é

$$\eta_x + (\eta_y - \xi_x)\omega - \xi_y\omega^2 = \xi\omega_x + \eta\omega_y. \tag{18}$$

Embora pareça complicada, soluções da equação acima satisfazendo a algum ansatz particular podem ser facilmente determinadas.

Exemplo 6.1 *Simetrias de Lie mais comuns, incluindo translações e dilatações, podem ser encontradas pelo ansatz*

$$\xi = c_1 x + c_2,\ \eta = c_3 y + c_4. \tag{19}$$

Substituindo a Eq. (19) *na Eq.* (18)*, obtemos*

$$(c_3 - c_1)\omega = (c_1 x + c_2)\omega_x + (c_3 y + c_4)\omega_y. \tag{20}$$

A condição de simetria da Eq. (20) *para*

$$y' = xy^2 - \frac{2}{x}y - \frac{1}{x^3}, \tag{21}$$

uma EDO tipo Ricatti, é, portanto,

$$[3c_2 + (2c_1 + c_3)x - 2c_4 x^3]/x^4 + 2(c_2 + c_4 x^3)y/x^2 + [c_2 + (2c_1 + c_3)x]y^2 = 0, \tag{22}$$

donde concluímos que

$$\left.\begin{aligned} 3c_2 + (2c_1 + c_3)x - 2c_4 x^3 = 0 \\ c_2 + c_4 x^3 = 0 \\ c_2 + (2c_1 + c_3)x = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = c_4 = 0 \\ c_3 = -2c_1 \overset{c_1=1}{\Longrightarrow} c_3 = -2 \end{cases}, \tag{23}$$

pois, $\{1, y, y^2\}$ *e* $\{1, x, x^3\}$ *são dois conjuntos LI's. A escolha* $c_1 = 1$ *é arbitrária. Assim,*

$$\xi = x,\ \eta = -2y, \tag{24}$$

o que nos permite afirmar que a Eq. (21) *admite simetrias de Lie geradas por*

$$X = x\partial_x - 2y\partial_y. \tag{25}$$

7 RESOLUÇÃO DE EDO's

Agora que estamos em posição de calculá-las sistematicamente, mostraremos como utilizar simetrias de Lie para resolver EDO's de primeira ordem.

Dado $X \neq 0$ um gerador de simetrias de

$$y' = \omega(x, y), \tag{26}$$

sejam (r, s) suas coordenadas canônicas ($X^{(k)} = \partial_s$). Reescrevendo, pois, a Eq. (26) em termos das novas coordenadas, obtemos

$$\dot{s} = \Omega(r, s), \tag{27}$$

para alguma função Ω. Como a Eq. (27) é invariante sob translações em s, pela condição de simetria da Eq. (16), $\Omega_s = 0$. Portanto,

$$\dot{s} = \Omega(r), \tag{28}$$

o que reduz a EDO original a uma simples quadratura. De fato, a solução geral da Eq. (26) é dada por

$$s(x,y) = \int^{r(x,y)} \Omega(r)dr + c \tag{29}$$

Exemplo 7.1 *Sabemos que*

$$y' = xy^2 - \frac{2}{x}y - \frac{1}{x^3} \tag{30}$$

admite simetrias de Lie geradas por $X = x\partial_x - 2y\partial_y$*. Considerando as coordenadas canônicas* $(r,s) = (x^2y, \ln|x|)$,[3] *reduzimos a Eq.* (30) *a*

$$\dot{s} = \frac{1}{r^2-1}, \tag{31}$$

uma EDO que pode ser imediatamente resolvida,

$$s = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{r-1}{r+1}\right| + c_1. \tag{32}$$

Logo, substituindo $(r,s) = (x^2y, \ln|x|)$ na Eq. (32), toda solução da Eq. (30) deve satisfazer a

$$\frac{x^2y-1}{x^2y+1} = c_2x^2,\ c_2 = \pm e^{-2c_1}, \tag{33}$$

o que nos leva a concluir que

$$y = \frac{x^2+c_3}{x^2(c_3-x^2)},\ c_3 = 1/c_2, \tag{34}$$

é a solução geral da Eq. (30).

8 CONCLUSÃO

Os assuntos tratados neste artigo se inserem em um contexto muito maior, o da grupo-análise. Em linhas gerais, a grupo-análise se utiliza da teoria de Lie para resolver problemas de análise. De fato, a teoria aqui apresentada pode ser extendida a EDO's de qualquer ordem. Para maiores detalhes, sugerimos fortemente a bibliografia desse trabalho.

[3] Ver Exemplo 4.2.

EXACT SOLUTIONS OF FIRST-ORDER ODEs VIA LIE POINT SYMMETRIES

ABSTRACT

There are several ingenious techniques to obtain exact solutions from an ordinary differential equation (ODE). Surprisingly, they are mostly special cases of more general methods based on the invariance of the equation under symmetry groups. In this article, it will be presented one of these methods. focusing, especially, in first-order ODEs.

Keywords: Lie point symmetries. First-order ODEs. Exact solutions.

REFERÊNCIAS

BLUMAN, G. W.; KUMEI, S. **Symmetries and differential equations**. New York: Spring-Verlag, 1989.

HYDON, P. E. **Symmetry methods for differential equations: a beginner's guide**. New York: Cambridge University Press, 2000.

IBRAGIMOV, N. K. **Transformation groups applied to mathematical physics**. Dordrecht: D. Reidel, 1985.

OLVER, P. J. **Applications of Lie groups to differential equations**. 2. ed. New York: Springer, 1986.

SATTINGER, D. H.; WEAVER, O. L. **Lie groups and algebras with applications to physics, geometry, and mechanics**. New York: Springer Verlag, 1986.

STEPHANI, H.; MACCALLUM, M. **Differential equations: their solution using symmetries**. Cambridge: Cambridge University Press, 1989.

Recebido em: 03/11/2015

Aprovado em: 09/09/2016

Publicado em: 19/11/2016