

UM LEVANTAMENTO HISTÓRICO SOBRE LIMITES¹

Alan Raniel Borges da Cruz²

RESUMO

Este trabalho foi desenvolvido com o intuito de produzir um texto que reúna algumas informações sobre a evolução histórica do conceito de Limite, bem como a formalização de seu conceito. Foi pesquisado como esse conceito evoluiu da intuição até a formalidade, e como sua representação se desenvolveu ao longo da história. Além disso, buscou-se levantar os pesquisadores que mais contribuíram para a evolução do conceito de Limite e como o fizeram. A fim de atender aos objetivos propostos, realizou-se um levantamento bibliográfico sobre a História da Matemática e o Estudo do Cálculo, em livros específicos. O Limite é um conceito antigo, suas noções mais básicas estão presentes na Grécia Antiga, porém seu maior desenvolvimento aconteceu no século XVII e após isso foi sendo aprimorado, adquirindo rigor. Na atualidade, algumas notações são as mesmas que surgiram no século XVII com as de derivada e integral.

Palavras Chave: Infinitésimos. Infinito. Limite.

1 INTRODUÇÃO

A ideia desta pesquisa partiu do interesse sobre o conteúdo de Limites; com ideias obtidas na graduação e até mesmo no Ensino Médio, quando o conteúdo é focado de forma breve e sem uma contextualização histórica.

A NOVA ESCOLA (1998, p. 53) defende que:

Ao reproduzir os processos pelos quais alguns conceitos matemáticos foram desenvolvidos, a partir de necessidades de diferentes povos e culturas, o professor tem a chance de estimular nos alunos a capacidade de dedução e o raciocínio lógico.

Com essa base, pode-se dizer que será importante para os profissionais da Educação Matemática conhecer a trajetória histórica dos conteúdos trabalhados, uma vez que esse

¹ **Como citar este artigo:** CRUZ, A. R. B. da. Um levantamento histórico sobre limites. **ForScience:** revista científica do IFMG, Formiga, v. 5, n. 1, e00214, jan./jun. 2017.

² Licenciado em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais (PUC-MINAS), licenciado em Física pela Universidade Metropolitana de Santos e licenciado em Pedagogia pela Universidade Metropolitana de Santos. E-mail: alan_raniel@yahoo.com.br.

ForSci.: r. cient. IFMG, Formiga, v. 5, n. 1, e00214, jan./jun. 2017.

conhecimento dá bases para a compreensão do raciocínio dos matemáticos do passado, de onde partiram e como pensaram no desenvolvimento de propriedades ou mesmo de definições. Entender como eles pensaram na época é fundamental para que o professor lide com as questões de aprendizagem dos seus alunos.

É muito comum escutarmos em sala de aula o aluno perguntar: “De onde veio isso?”. Conhecer a história da disciplina que está sendo estudada resolve essa importante questão. Mas estudar não só as descobertas, curiosidades, datas e biografias. É preciso conhecer a gênese, o desenvolvimento e a significação do conhecimento. E preciso caracterizar o que é o conhecimento, como ele se forma e como é instrumento de poder. E isso é muito importante também para o professor (ROSA NETO, 2002, p. 7).

Existem várias ideias que antecederam o conceito de Limite como é conhecido hoje; são ideias repletas de associações com outras áreas, como Astronomia e Física, além de motivos pelos quais o Limite teve momentos de pleno desenvolvimento ou estagnação, seja em Atenas num período de guerras e disputa de território seja na produtiva escola Pitagórica ou nas dificuldades de povos em aceitar números incomensuráveis.

De acordo com o primeiro levantamento realizado sobre o tema, entretanto, as referências sobre a história do Limite são fragmentadas. Obras distintas apresentam focos diferentes ao descrever as origens do tema. Em nenhuma referência foi possível conhecer o Limite desde sua criação com detalhes em todas as etapas e quais matemáticos contribuíram para o seu desenvolvimento.

Desse modo, realizou-se uma pesquisa bibliográfica com objetivo de produzir um texto que reúna de modo organizado informações sobre a evolução histórica do conceito de Limite, bem como de sua representação.

Para isso foi preciso pesquisar como o conceito de Limite evoluiu, desde as ideias intuitivas até a linguagem atual, de que modo a representação do Limite, notações e definições, foi se modificando ao longo da história e levantar quais foram os principais pesquisadores que contribuíram para evolução do Limite e como o fizeram.

A pesquisa foi guiada com o levantamento de material bibliográfico, História da Matemática para a contextualização histórica sobre Limites e livros de Cálculo para definições modernas. De posse do material, selecionou-se de cada obra as informações pertinentes aos objetivos do trabalho, entre elas, conceitos que antecederam a ideia de Limite, como eles se desenvolveram, quem contribuiu e como, até os dias de hoje. Por fim, uma vez

obtidos os dados históricos e definições, foram organizadas as várias ideias nas seções apresentadas a seguir.

2 O QUE ANTECEDE O CONCEITO DE LIMITE

2.1 Antes do século XVII

É difícil definir a relevância das ideias de Zenão de Eléia (c. 460 a.C.) para a Matemática Grega. De todo modo, em seus trabalhos, principalmente nos que se tornaram paradoxos, ele utilizava conceitos de matemática contínua.

De seus trabalhos é importante ressaltar dois paradoxos, o da “Dicotomia” e o de “Aquiles”, ambos possuem ideias de Infinito.

Em dois dos paradoxos, a dicotomia e Aquiles, Zenão argumentou que se o tempo e o espaço são divisíveis, o movimento seria impossível. Em resumo, para alcançarmos B, saindo de A, é necessário alcançar C (ponto médio entre A e B); para alcançar C é necessário alcançar D (ponto médio entre A e C); para alcançar D é necessário alcançar E (ponto médio entre A e D); o argumento continua assim *ad infinitum* [até o Infinito], concluindo-se então que o movimento não pode começar! (BARON; BOS, 1985, v. 1, p. 23).

No paradoxo de Aquiles e a tartaruga, o argumento é semelhante:

Se a tartaruga está em B e Aquiles em A, Aquiles nunca pega a tartaruga, pois no momento em que Aquiles chega no ponto B a tartaruga estará em algum ponto C adiante, e quando Aquiles chega em C a tartaruga estará em algum ponto D adiante, e assim por diante *ad infinitum* [até o Infinito]: a tartaruga estará sempre à frente! (BARON; BOS, 1985, v. 1, p. 23).

Tanto no paradoxo da “Dicotomia” quanto no de “Aquiles” trata-se da ideia de mesmo quando existem dois pontos cuja distância é muito pequena, sempre existirão outros pontos colineares, compreendidos entre eles, cuja distância é menor ainda. E dentre esses outros com distâncias menores ainda, existirão outros sucessivamente. Ou seja, noções básicas de infinitos, porém ainda não eram tratadas como tal, o infinito ainda era uma ideia de algo muito grande apenas.

Exemplificando de forma simples o conceito tratado nos paradoxos, imagine que uma formiga está um metro distante de uma folha, suponha que de cada vez ela só anda

metade do que falta, a ideia dos paradoxos é que ela vai andar infinitamente e nunca chegará até a folha. No primeiro movimento ainda faltaria meio metro, após o segundo faltaria um quarto de metro, depois um oitavo, um dezesseis avos, um trinta e dois avos e assim por diante. Numa situação real chega ser difícil imaginar que essa mínima movimentação seja possível, porém em teoria é possível afirmar que ela nunca chegaria ao seu destino. Vários autores possuem obras referencias ou explicações para o paradoxo de Zenão, como Apostol (1988), Pires (2008), Guimarães (2007). Destacando o último que analisa o paradoxo de forma quase poética e com fácil compreensão.

Os gregos de aproximadamente 300 anos antes de Cristo sentiam-se perturbados diante de processos Infinitos. Por exemplo,

Sempre que o algoritmo euclidiano para achar o máximo divisor comum de dois inteiros é aplicado em aritmética, o processo acaba num número finito de passos, pois o conjunto dos inteiros positivos tem um mínimo, o número 1. Se, por outro lado, o esquema análogo é aplicado com roupagem geométrica para achar a maior medida comum a dois segmentos de reta incomensuráveis, o processo prosseguirá indefinidamente. Não há algo como o menor segmento de reta — pelo menos não segundo a visão ortodoxa, nem segundo os conceitos modernos convencionais (BOYER, 1995, p. 3).

Aristóteles (c. 384-c. 322 a.C.) e outros filósofos gregos tentaram resolver questões assim e outras parecidas, como os paradoxos de Zenão. Porém os métodos para resolução eram muito inconvenientes e os Matemáticos Gregos decidiram evitar processos e noções de Infinito (BOYER, 1995).

Mesmo não tendo desenvolvido métodos práticos, Arquimedes contribuiu com o Cálculo Infinitesimal ao escrever o livro “*Método*”. Neste livro foi feito um esquema para “equilibrar entre si os elementos de figuras geométricas” (BOYER, 1995, p. 5). Por exemplo, um segmento de reta é formado por Infinitos pontos; uma área de superfície plana composta por infinitas retas paralelas; um sólido é formado por secções planas. É importante levar em conta que o Limite ainda não era bem definido, como dito, consideravam-no uma “quantidade muito grande” (BOYER, 1995, p. 5).

Os matemáticos do século XIV não possuíam e nem desenvolveram técnicas de álgebra e geometria capazes de resolver problemas ou desenvolver conceitos que usam Infinito. Através de “imaginação e pensamento preciso” (BOYER, 1996, p. 182),

conseguiram apenas sugerir novos pontos de vista para séries infinitas, porém com muita superficialidade (BOYER, 1996, p. 182).

Por causa da “Guerra dos Cem Anos” (1337-1453), “Guerra das Rosas” (1455-1485) e da epidemia de Peste Bubônica, durante o período medieval a cultura sofreu declínio. Com isso, a matemática ficou estagnada nesse período (BOYER, 1996, p. 183).

2.2 Do século XVII em diante

Até o início do século XVII não havia nenhum conceito bem definido de Limite ou Infinitésimos. Houve o paradoxo de Zenão que, em sua época, muitas vezes, era considerado incompreensível. Os matemáticos gregos dos séculos VI e VII a. C. evitavam utilizar qualquer noção de quantidade incomensurável, conforme afirma Caraça (1989, p. 81), devido ao fato de terem excluído o conceito quantitativo de Infinito das teorias pitagóricas, números irracionais.

[...] resulta que nenhum dos problemas postos pela crítica de Zenão foi resolvido na antiguidade.

Concluiu-se pela incapacidade numérica para resolver o problema das incomensurabilidades; portanto, pela degradação do número em relação à Geometria. Consequência: abandonou-se o que a escola pitagórica afirmara de positivo — a crença numa ordenação matemática do Cosmos — e retomou-se, a breve trecho, em termos cada vez menos nobres, o lado negativo das suas concepções.

Concluiu-se pela exclusão do conceito quantitativo de Infinito dos raciocínios matemáticos — a matemática grega toma uma feição de cada vez mais finitista: invade-a o horror do Infinito.

[...] Mais tarde, havia de levantar-se um vento portador de forças novas que, rasgando o biombo em farrapos, colocaria novamente os homens em contacto com a realidade, estudante de vida (CARAÇA, 1989, p. 81 e 82).

Do século XVII em diante temos uma evolução maior dos conceitos de Infinitésimos. Simon Stevin (1548-1620) se preocupou com aplicações de elementos Infinitos na Física, sendo um dos primeiros a ter ideias de modificações nos conceitos existentes de divergência. Preferia demonstrações geométricas a algébricas. Já Kepler (1571-1630) tinha interesse em usar pontos localizados no Infinito aplicados à astronomia. Um exemplo disso foi em 1604, ao propor uma elipse com dois focos, sendo um deles no tão distante quanto se queira (CARAÇA, 1989).

Para Caraça (1989, p. 214-217), a necessidade de trabalhar com o Infinitésimo e a Convergência veio basicamente da situação de estudo do movimento. Antes era dado pelo

método estático, ou sucessão de estados e discussões. Kepler em 1609 apresentou em sua primeira lei conceitos sobre órbitas planetárias em trajeto elíptico ao redor do Sol, este seria um dos focos da elipse. A partir daí pesquisadores da época passaram a estudar o porquê de serem movimentos elípticos e não circulares. Ao estudar movimentos era preciso ter em mente que o movimento não era algo a ser dado ou explicado, e sim algo que deve ser observado. Era necessário estipular um conjunto de leis que com dados desse movimento, tornassem possível a previsão de resultados para conferir se estariam corretos ou não.

[...] a nova astronomia de Kepler, na qual o movimento dos planetas em órbitas elípticas não é uniforme, exigia uma matemática superior. [...] A época agora estava madura para se construir, a partir da análise infinitesimal, o que hoje conhecemos como cálculo. Nenhuma invenção nova específica era necessária, as técnicas estavam à mão. O que faltava era um senso de universalidade das regras (BOYER, 1995, p. 17).

A *Arithmetica Infinitorum* foi uma obra publicada por John Wallis (1616-1703) em 1665, nesta, ele criou a concepção de um Limite de forma Aritmética. Estudando seqüências de certas razões, ele observou que os fatores das frações caminhavam para um “valor Limite” (CAJORI, 2007, p. 256), ao fazer a diferença destes, ela se torna menor que qualquer valor arbitrariamente escolhido, e desaparecerá se transportada até o Infinito. John Wallis ainda nesta obra, fez uso prolongado da Lei de Continuidade e por ela chegou a considerar os denominadores como expoentes negativos. Ele não usou uma notação com expoentes negativos, mas comentou sua constatação. E foi ele quem criou o símbolo “ ∞ ” para o Infinito.

Existiam muitas ideias e conceitos fragmentados relacionados à diferenciação, integração e às séries infinitas, e foram Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716) e Isaac Newton (1642-1727) os que reuniram essas informações. “Juntaram dispositivos de aplicabilidade limitada e desenvolveram, por meio deles, métodos que permitiam um alcance universal” (BOYER, 1995, p. 21).

No estudo de movimentos, até então tratados como sucessão de estados, ao estudar o movimento de uma flecha, por exemplo, não havia como determinar uma posição exata da trajetória num determinado momento, pois o projétil já estaria em outra posição. Em um instante é percorrido um segmento com Infinitos pontos, e mesmo que tente se reduzir a uma aproximação, por menor que seja o intervalo de tempo, acontece a mesma situação de percorrer Infinitos pontos. Logo, fazer estudos isolados de instante e momento não seria

possível, pois para obter resultados deveria ser observado um conjunto de pontos e instantes, que viessem antes e depois do que desejava ser estudado.

Com isso se fez necessária a criação de uma análise capaz de compreender toda a infinidade de dados contidos entre dois momentos. E, além disso, não poderia ser um único número, deveria ser uma variável, pois a variável possui, segundo Caraça (1989, p. 127), a característica de não ficar presa aos resultados particulares, podendo obter soluções com generalidade. A situação a seguir é exposta por esse mesmo autor:

Seja (E) um conjunto qualquer de números, conjunto finito ou Infinito, e convençionemos representar qualquer dos seus elementos por um símbolo, por exemplo, x. A este símbolo representativo de qualquer dos elementos do conjunto (E) chamamos de variável (CARAÇA, 1989, p. 127).

Uma vez que a variável passa a ser utilizada para trabalhar com infinitos pontos entre dois outros que estão próximos, este mesmo autor nos chama a atenção para o fato de essa variável necessitar ser de valor muito pequeno em módulo, em módulo pois normalmente estará indicando distancia. Através de análises e discussões dessa ideia começa a surgir o conceito de Infinitésimo, ainda conforme Caraça (1989).

Já utilizando o conceito de variável, de acordo com Boyer (1995, p. 17-19), Newton e Leibniz conseguiram desenvolver uma “nova e geral análise, a análise infinitesimal”, esta foi fundamentada na descoberta das “expansões em séries infinitas”.

O teorema [Teorema do Binômio de Newton] era conhecido havia muito tempo para potências inteiras, incluindo até a regra de sucessão para os termos da expansão. Mas Newton foi o primeiro a aplicá-la para o caso de expoentes fracionários, em que a expansão é interminável. Através de uma expansão binomial infinita, Newton teve condições de chegar a quadraturas que seus predecessores não tinham conseguido encontrar — por exemplo, a integração de $(x - x^2)^{1/2}$, que Wallis procurara em vão. O método também podia ser aplicado para achar integrais (Newton as chamava de “fluentes”) de funções transcendentess (BOYER, 1995, p.17-18).

Boyer (1996, p. 271) afirma que Newton, ao trabalhar com séries infinitas, deixou claro que essas não eram apenas “instrumentos de aproximação”, mas sim, notações diferentes para as funções as quais correspondiam. Além disso, eram aplicáveis às “mesmas leis gerais que a álgebra de quantidades finitas”. Sua publicação de 1711 causou o efeito de encorajar os matemáticos a não “evitem processos infinitos” a partir daquele momento, ou

seja, não fazer como os gregos que tinham aversão a métodos que envolvessem ideia de quantidades infinitas, pois esses processos tratavam-se realmente de matemática.

Newton defendia que métodos de trabalho com o Infinito são tão importantes quanto os que só se aplicam à álgebra ordinária. Por isso se for necessário indicar alguém como o primeiro inventor do cálculo, esse seria Newton. Não por nenhuma regra, mas pelo reconhecimento da importância de estudar processos Infinitos em qualquer função. E Leibniz tem como principal participação na invenção do cálculo ter construído, em 1676, uma análise mais moderna e universal. Em seus artigos, de 1684 a 1686, ele descreve que seu método (expansões em séries infinitas) não possui restrições para funções transcendentem nem irracionais.

Em 1669 Newton entregou para Isaac Barrow (1630-1677) um texto chamado “*Analusi per Aequationes Numero Terminorum Infinitas*”, nesta obra ele descreve o método das fluxões (ou fluxos), porém ainda com desenvolvimento parcial. Mesmo sob pressão de Barrow que incentivava a publicação, esta só aconteceu 42 anos mais tarde (CAJORI, 2007, p. 266).

O “Método dos Fluxos” foi escrito por Newton, publicado em 1711. Neste livro, Newton afirma que um ponto, ao se movimentar de forma constante, gera uma curva. A partir daí as coordenadas do ponto gerador normalmente passam a ser variáveis. As quantidades variáveis ele denominou “fluentes” e as taxas de variação das mesmas chamou de “fluxos”.

Hoje em dia a fluente é conhecida como $\frac{dy}{dt}$ (CAJORI, 2007).

A intenção de Newton com esse livro foi expor seu método como “um cálculo completo e um sistema independente” (CAJORI, 2007, p. 267). Como esta publicação era pequena, seria também para ser usada como uma espécie de introdução para o próximo livro que seria mais completo. Porém ele não chegou a concluir esse plano, seja por medo de disputas ou desejo de só lançar o segundo quando estivesse o mais completo possível. Por fim, a publicação de “O método dos fluxos” só aconteceu em 1736.

Nesse livro, ele usa muito a ideia de Infinitésimos, e como Leibniz usava raciocínio de essência igual, considera-se que o cálculo no continente Europeu partiu das Análises Infinitesimais.

No século XVIII, a análise de Newton e Leibniz era fixada como “análise superior” e “análise sublime”, para distingui-la das regras de álgebra ordinária. Newton escreveu em 1669

um livro que só foi publicado em 1711, defendendo a razão pela qual seu novo método (trabalhar com Infinito) poderia ser chamado de análise (BOYER, 1995, p. 19).

A elaboração de várias regras e procedimentos para soluções de muitas questões do Cálculo Infinitesimal são obras de Newton. Alguns problemas já haviam sido trabalhados antes, mas cada um de uma forma e raciocínio específicos. Ao sistematizar as resoluções, Newton criou uma forma de resolver que satisfazia a todos os problemas. Ele também deixou clara a questão de a diferencial e a integral serem inversas. No entanto não parecia ter preocupação com notações, demorou muito para desenvolver uma correspondente à diferencial; e para integral não há registro de que tenha feito notação (BARON; BOS, 1985, v. 3, p. 39).

Baron e Bos (1985, v. 3, p. 52) e Boyer (1995, p. 50) deixam claro que os feitos de Leibniz para o Cálculo estão ligados fortemente às notações. Mesmo ciente da importância da Teoria do Cálculo, seu trabalho era voltado muitas vezes a desenvolver notações claras, várias delas usadas até hoje, $\frac{dy}{dx}$ para derivada e $\int dx$ integral. Mesmo dando maior ênfase para boas notações e simbologias, Leibniz foi capaz de perceber que somar seqüências tem como operação inversa fazer suas diferenças. E Este chamava de “*Calculus Summatorius*” o que na atualidade é denominado como “Cálculo de Integral”. A criação do nome mais recente foi atribuída a ele em conjunto com Johann Bernoulli (1667-1748) em 1696 “*Calculus Integralis*”.

Juntos Newton e Leibniz desenvolveram métodos de análise infinitesimal aplicáveis a qualquer curva, independente da natureza desta. A partir do que fizeram, a teoria dos Infinitésimos passou a ser coerente e ter vastas possibilidades de desenvolvimento e aplicações. E o Cálculo pôde ser analisado com fórmulas e símbolos ao invés de desenhos, descrições verbais e argumentos geométricos. “A coerência dos sistemas de Leibniz e Newton foi atingida devido ao reconhecimento do teorema fundamental do cálculo: a relação inversa entre a diferenciação e a integração” (BARON; BOS, 1985, v. 3, p. 69).

3 O DESENVOLVIMENTO DA DEFINIÇÃO INTUITIVA E FORMAL DO LIMITE

Newton e Leibniz desenvolveram cada um, uma linguagem, uma lógica e simbolismo próprio para uso na nova matéria, análises infinitesimais (BOYER, 1995, p. 20-

21). Newton desenvolveu primeiro, porém Leibniz foi mais rápido na divulgação de descobertas (EVES, 2004, p. 444).

Newton em seu livro *Principia* (1687) descreve sobre o conceito de primeira e última razão; este conceito é usado para fundamentar seus métodos e ideias de análise infinitesimal.

As quantidades e as razões das quantidades que convergirem continuamente para a igualdade, num intervalo de tempo finito, e que antes do final do intervalo de tempo se aproximarem mais entre si do que entre qualquer uma diferença, tornar-se-ão iguais (NEWTON apud BARON; BOS, 1985, v.3, p. 31).

Com a definição de primeira e última razão, Newton se aproximou bastante da definição atual de Limite.

Por razão última das quantidades evanescentes deve-se estender a razão das quantidades, não antes de desaparecerem, nem depois, mas com as quais elas desaparecem (BOYER, 1995, p. 21).

Quando ele fala em “razão última”, temos algo parecido com o tender para infinito atualmente, seria algo assintótico, tentando se aproximar ao máximo do extremo que se possa seguir. “Quantidades evanescente” são aquelas prestes a desaparecer, ou algo tendendo ao zero. A definição de primeira e última razão de Newton lembra muito o conceito atual de limite e a representação de curvas com assíntotas.

Apesar de ter se aproximado, Newton não avançou mais na definição de Limite, pois insistiu em trabalhá-lo especificamente como razão entre velocidades. Somente no fim do século XIX veio a se concluir que o resultado obtido de uma série infinita pode ser um número real não necessariamente ligado à velocidade, podendo ser contextualizado em outras situações, como taxas de relacionadas de variação de grandezas diferentes.

Segundo Boyer (1995, p. 20), por um ponto de vista baseado na lógica, o cálculo de Leibniz e seus discípulos não foi muito bem sucedido, haja vista não terem deixado claro o significado de Infinitésimo e nem o porquê descartar quantidades infinitamente pequenas. Já sob um olhar heurístico, foram bem sucedidos, descobrindo e resolvendo problemas onde o Cálculo se aplicava.

Newton iniciou o cálculo da integral utilizando como símbolo um quadrado, pois percebeu que se aplicava a uma área. Depois passou à usar um traço vertical sobre a variável. Leibniz pensava em integral como a soma de infinitas quantidades muito pequenas,

Infinitésimos, daí usava um formato de letra S da época. Usava uma letra S para associar à palavra *summa*, que significa soma; símbolo este que é usado até os dias de hoje (BOYER, 1995, p. 21).

Após o descobrimento do Cálculo, vários Pesquisadores Matemáticos passaram a produzir artigos sobre este e sem se importarem com as informalidades que o Cálculo possuía até então ou com outros pontos dele a serem melhorados. O uso passou ser discrepante de tal modo que usavam como argumento o fato de aplicações darem certo, ora se funcionavam não havia o que ser mudado (EVES, 2004, p. 532).

No fim do século XVIII, chegou-se a certo ponto onde surgiram tantas situações de contradição e absurdos no Cálculo que finalmente se estabeleceu a preocupação em melhorar o rigor matemático dele (BOYER, 1995, p. 26 e EVES, 2004, p. 530).

Jean Lê Rond d'Alembert (1717-1783) constatou em 1754 que era necessária uma teoria para os Limites, mas não obteve êxito ao tentar desenvolvê-la. No início do século XIX Lagrange (1736-1813) e Gauss (1777-1855) tiveram a iniciativa de implantar rigor à análise matemática de modo geral e também ao Cálculo. As tentativas de melhoria por parte de Lagrange em relação ao Cálculo baseavam-se em expandir as funções em “Séries de Taylor”. Não chegou a concluir isso, pois desprezava conceitos de Convergência e divergência que eram importantes para se chegar a uma boa Teoria de Limites (EVES, 2004, p. 532).

Foi Augustin Louis Cauchy (1789-1857) em 1821, em seu trabalho “*Cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique*”, quem conseguiu cumprir a iniciativa de criar a Teoria dos Limites com rigor matemático. Foi possível, então, fazer uma definição precisa para “Continuidade, diferenciabilidade e integral definida em termos de conceito de Limite” (EVES, 2004, p. 610).

A definição de Cauchy foi:

Quando os valores sucessivos atribuídos a uma variável aproximam-se indefinidamente de um valor fixo, chegando a diferir dele tão pouco quanto se deseje, este último é chamado Limite de todos os outros (BOYER, 1995, p. 26).

A matemática contemporânea não aceitaria uma definição assim, pois não define bem variável dependente e independente, porém na época era suficiente. Levando em conta que passaram por algumas formulações mais cuidadosas, as definições de Limite usadas nos textos atuais de Cálculo são as de Cauchy. O rigor que ele trabalhou foi motivação para outros

pesquisadores da área se juntarem com o objetivo de tirar as falhas presentes na análise (Cálculo), sejam vindas do formalismo ou do intuicionismo (BOYER, 1995, p. 26).

Cauchy também desenvolveu o “teste da raiz” e o “teste da razão”, que são usados atualmente, assim como na época, para a análise de Convergência ou divergência em séries positivas. Os conceitos básicos de Limite e Continuidade usados hoje são atribuídos a Cauchy. Assim como a definição de Derivada de uma função de x como:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Embora tivesse ciência da facilidade operacional das diferenciais, Cauchy relegou-as a segundo plano. Se dx é uma quantidade finita, ele definiu dy , de $y = f(x)$, simplesmente como $f'(x)dx$. Embora durante o século XVIII a integração fosse geralmente focalizada como a inversa da diferenciação, Cauchy preferiu definir a integral definida como o Limite da soma de um conjunto infinitamente crescente de partes pequenas tendendo a zero, de modo muito parecido com o que fazemos hoje. A relação entre uma integral e uma antiderivada se estabelecia então através do teorema do valor médio (EVES, 2004, p. 532).

No ano de 1874, Karl Weierstrass (1815-1897) publicou um exemplo de função a qual não era possível derivar. Esta publicação causou questionamentos sobre a Teoria de Cauchy. O problema foi causado pelo fato da Teoria dos Limites de Cauchy ter sido elaborada com base apenas em noções intuitivas de números reais, e como conceitos apurados de Limite dependem das propriedades que hoje são claras, mas na época ainda não tinham sido apuradas, haviam brechas nas teorias de Cauchy.

Weierstrass e seus seguidores perceberam que praticamente tudo de matemática até então dependia de números reais, logo, o primeiro passo para implementar rigor à teoria de Limites ou qualquer outra foi tratar de forma rigorosa os números reais. Foi um processo difícil e confuso, mas ao final eles obtiveram sucesso e esse processo ficou conhecido como a “aritmética da análise”.

A procura de um entendimento mais profundo dos fundamentos da análise ganhou um relevo extraordinário em 1874 com a publicação de um exemplo, da lavra do matemático alemão Karl Weierstrass, de uma função contínua não-derivável ou, o que é equivalente, de uma curva contínua que não admite tangente em nenhum de seus pontos. Georg Bernhard Riemann inventou uma função que é contínua em todos os valores irracionais da variável, mas descontínua para os valores racionais. Exemplos como pareciam contrariar a intuição humana e tornavam cada vez mais evidente que Cauchy não tinha atingido o verdadeiro âmago das dificuldades na

procura de uma fundamentação sólida para a análise. A teoria dos Limites fora construída sobre uma noção intuitiva simples do sistema dos números reais. De fato, o sistema dos números reais tenha sido mais ou menos admitido sem maiores cuidados, como ainda se faz na maioria dos textos elementares de cálculo. E é claro que a teoria dos Limites, Continuidade e diferenciabilidade dependem mais de propriedades recônditas dos números do que se supunha então. Assim, Weierstrass defendeu um programa no qual o próprio sistema dos números reais, antes de mais nada, fosse tornado rigoroso para que assim tudo que dele decorresse na análise inspirasse segurança. Esse notável programa, conhecido como aritmetização da análise, revelou-se difícil e intrincado, mas acabou se concretizando através de Weierstrass e seus seguidores, e hoje a análise pode ser deduzida logicamente de um conjunto de postulados que caracterizem o sistema dos números reais (EVES, 2004, p. 610 e 611).

Durante aproximadamente todo o século XIX, a matemática foi revisada como um todo, desde conceitos de funções até os de Limite, a intenção foi encontrar formalidade em todos os ramos da mesma. Com esse refinamento de conceitos foi possível no século XX desenvolver “generalizações complexas” (EVES, 2004, p. 462) e caracterizações mais abstratas para, por exemplo, “integrabilidade, convergências, espaço e dimensão” (EVES, 2004, p. 462).

Desde a antiguidade até atualmente houve três grandes “crises” nos Fundamentos da Matemática. A primeira foi no século V a.c., quando existia uma teoria dos pitagóricos sobre “grandezas da mesma espécie deveriam ser comensuráveis” (EVES, 2004, p. 673). A crise aconteceu quando foi descoberta a existência de segmentos incomensuráveis, estes contrariavam “toda a teoria pitagórica de proporções, com suas consequências”, uma vez que “a teoria pitagórica se baseava em crença intuitiva de que todas grandezas da mesma espécies deveriam ser comensuráveis” negar a comensurabilidade seria o mesmo que abandonar todos trabalhos pitagóricos (EVES, 2004, p. 673).

A segunda crise foi causada aos poucos por causa da invenção do Cálculo por Newton e Leibniz. Os matemáticos que os sucederam passaram a usar o Cálculo tanto quanto possível, sem preocupação com rigor de tal modo que passaram a usar em alguns casos resultados particulares no lugar de demonstrações.

A crise surgiu justamente pela falta de fundamentação. Contradições e paradoxos foram ficando cada vez mais comuns. Os principais matemáticos a contribuir para solução dessa crise foram Cauchy com sua Teoria dos Limites e Weierstrass e seus seguidores, que finalizaram a crise com a aritmetização da análise. A grande vantagem foi que, após isso, os Fundamentos da Matemática passaram a ser estruturados e possuírem bases sólidas.

Houve a terceira crise que teve como motivo os paradoxos encontrados na Teoria de Conjuntos de Georg F. L. P. Cantor (1845-1918), a crise aconteceu pelo fato de a teoria de conjuntos fundamentar grande parte da matemática.

Após a aritmetização da álgebra, foi possível desenvolver as definições de Limites e Infinitésimos usadas atualmente. Apresentadas na seção a seguir.

4 DEFINIÇÕES DE LIMITE E INFINITÉSIMO

Caraça (1989, p. 219) define Infinitésimo.

Dá-se o nome de Infinitésimo a toda a variável representativa de um conjunto de pontos pertencentes à vizinhança da origem quando nessa variável considerarmos sucessivamente valores $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ tais que $|x| < \sigma$ para todos os valores de $n > n_1$ e todo $\delta > 0$ (CARAÇA, 1989, p. 219).

Prosseguindo com as ideias do mesmo autor, para a variável x ser Infinitésimo, é necessário que haja valores dele na vizinhança de zero e considerar valores sucessivos tão próximos de zero quanto se quiser. Sendo possível x ser uma sequência $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ e seguir a propriedade citada, diz-se que o x tende para zero, ou seja, é um Infinitésimo. Se a propriedade não for atendida, a mesma variável x não será considerada Infinitésimo.

Vizinhança é definida por Caraça (1989) como uma variável de domínio formado por uma infinidade de segmentos, de tal modo que escolhendo qualquer número positivo, existirá um segmento de amplitude menor, Fazendo uma relação desse conceito geométrico de vizinhança é possível ver que é igual ao conceito analítico de Infinitésimo.

Reafirmando definições de Infinitésimos, outra importante para ser comentada: “Seja a variável inteira n , a variável cujo domínio é o conjunto Infinito dos números naturais e considerando x uma outra variável tal que $x = \frac{1}{n}$ ” (CARAÇA, 1989, p. 221), pode-se estabelecer a relação:

A variável x tem no seu domínio números inferiores a todo número positivo. Seja, com efeito, δ um número positivo qualquer, para certificar-se que existem no domínio de $x = \frac{1}{n}$, números inferiores a δ , basta notar que para $\frac{1}{n} < \delta$, n deve

ser maior que $\frac{1}{\delta}$; ora por menor que seja δ , é, portanto maior do que $\frac{1}{\delta}$. Há sempre valores do domínio de n (uma infinidade), superiores a $\frac{1}{\delta}$. Qualquer que seja o número positivo δ pode fazer-se-lhe corresponder a um inteiro n_1 tal que, para todo o $n > n_1$, é $\frac{1}{n} < \delta$ (adaptado de CARAÇA, 1989, p. 221).

Conforme Caraça (1989, p. 224) “O Infinitésimo pode ser definido utilizando uma sequência numérica, ou sucessão numérica, da seguinte forma, “seja $a_n = f(n)$ uma função de variável inteira, uma de suas variáveis inteiras é $x = a_n = \frac{1}{n}$ “. Este Infinitésimo $\frac{1}{n}$ recebeu o nome de “*Infinitésimo principal*””.

Dada a função de variável inteira $a_n = f(n)$, Se a todo o número positivo δ se pode fazer corresponder um inteiro n_1 tal que a desigualdade $n > n_1$ arraste a desigualdade $|a_n| < \delta$:

$$n > n_1 \rightarrow |a_n| < \delta$$

diz-se que essa função é um Infinitésimo com $\frac{1}{n}$.

Seja a sucessão numerável $a_n = f(n)$ um Infinitésimo com $\frac{1}{n}$, tem-se que essa função é vizinha de zero quando n é vizinho de Infinito (CARAÇA, 1989, p. 225-226).

Após toda a evolução dos conceitos de Cálculo, principalmente de Newton e Leibniz em diante, hoje é possível definir o conceito de Limite com precisão, rigor matemático; como desejava Cauchy. A seguir definições de Limite para vários focos específicos, todas com a mesma base, diferindo apenas na riqueza de detalhes.

É oferecida por Caraça (1989, p. 231) a definição de Limite para alunos da graduação em matemática. “Diz-se que a sucessão numerável a_n tem por Limite o número L , quando n tende para Infinito, e escreve-se:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

Logo após, acrescenta dados importantes:

Diz-se que a sucessão numerável a_n tem por Limite <<mais Infinito>> quando n tende para Infinito e escreve-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

quando a todo o número positivo Δ se pode fazer corresponder um inteiro n_1 tal que $n > n_1 \rightarrow a_n > \Delta$ ” (CARAÇA, 1989, p. 235).

Diz-se que a sucessão numerável a_n tem por Limite <<menos Infinito>> quando n tende para Infinito e escreve-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$$

quando a todo o número negativo $-\Delta$ se pode fazer corresponder um inteiro n_1 tal que $n > n_1 \rightarrow a_n < -\Delta$ (CARAÇA, 1989, p. 236).

Já Stewart (2003, v.1, p. 93) define Limite de modo um pouco diferente, mas igual na essência:

Escrevemos:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

e dizemos “o Limite de $f(x)$, quando x tende a a , é igual a L ” se pudermos tornar os valores $f(x)$ arbitrariamente próximos de L (tão próximos de L quanto quisermos), tornando x suficientemente próximo de a (por ambos os lados de a) mas não igual a a .

À grosso modo, isso significa que os valores de $f(x)$ ficam cada vez mais próximos do número L à medida que x tende ao número a (por qualquer lado de a), mas $x \neq a$.

Prossegue definindo Limites laterais:

Escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$$

e dizemos que o Limite esquerdo de $f(x)$ quando x tende a a [ou o Limite de $f(x)$ quando x tende a a pela esquerda] é igual a L se pudermos tomar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de L , tomando-se x suficientemente próximo de a e x menor que a .

Observe que a Definição 2 difere da Definição 1 pelo fato de exigirmos que x seja menor que a . Analogamente, se for exigido que x seja maior que a , obteremos “o Limite direito de $f(x)$ quando x tende a a como igual a L ”, e escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L \quad (\text{STEWART, 2003, v. 1, p. 93}).$$

E também Limites Infinitos:

Seja f uma função definida em ambos os lados de a , exceto possivelmente em a .
Então

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

significa que podemos fazer os valores de $f(x)$ ficarem arbitrariamente grandes (tão grandes quanto quisermos) tomando x suficientemente próximo de a , mas não igual a a (STEWART, 2003, v. 1, p. 99).

Seja f uma função definida em ambos os lados de a , exceto possivelmente em a .
Então

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

significa que os valores de $f(x)$ podem ser arbitrariamente grandes, porém negativos, escolhendo-se os valores de x próximos de a , mas diferentes do próprio a (STEWART, 2003, v. 1, p. 100).

Como último exemplo de definições modernas de Limites, Giovanni e Bonjorno (1992, p. 228) define Limite de modo simples com a intenção de fazer-se claro para alunos de 3º ano de Ensino Médio.

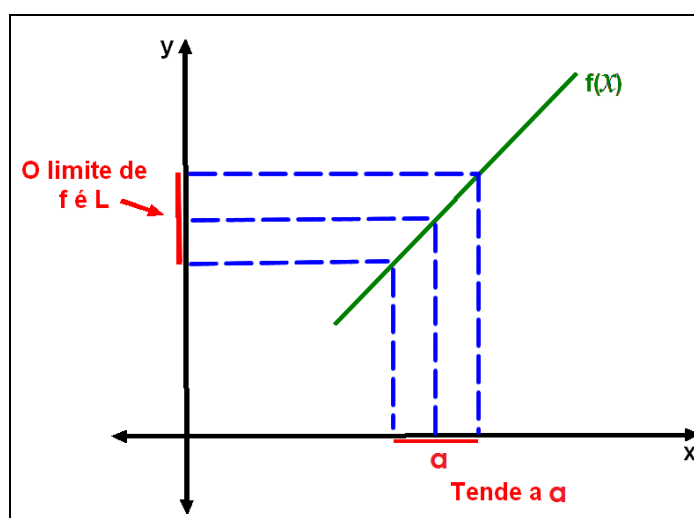


Figura 1 - Gráfico de uma função do primeiro grau
Fonte: Giovanni e Bonjorno (1992, p. 228)

Dizemos que o Limite da função $f(x)$ quando x tende a a é igual ao número real L se, e somente se, os números reais $f(x)$ para os Infinitos valores de x permanecerem próximos de L , sempre que x estiver muito próximo de a .

Indica-se:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L.$$

(GIOVANNI, 1992, p. 228).

Por fim, podemos sintetizar as principais contribuições para o conceito e representação de limite e seu desenvolvimento. Durante o desenvolvimento dos conceitos

atuais de Limite e suas representações, existiram vários filósofos e/ou matemáticos que contribuíram, dentre eles os principais são:

- a) Zenão de Eléia (c. 460 a.C.); Seus paradoxos utilizando ideias de Infinito por muito tempo causaram dúvidas e questionamentos nos gregos e em vários povos. (BARON; BOS, 1985);
- b) Aristóteles (c. 384-c. 322 a.C.) desenvolveu vários trabalhos com processos infinitos, como por exemplo, suas teorias sobre formação de retas, planos e sólidos (BOYER, 1995, p. 3);
- c) Newton e Leibniz foram os maiores contribuintes, dentre seus vários feitos, é importante ressaltar:
 - Newton (BARON; BOS, 1985, v. 3, p. 39):
 - criou soluções gerais para grande parte dos problemas do Cálculo de Infinitésimos do seu tempo,
 - uso de séries infinitas em curvas quadráveis,
 - sua estrutura era capaz de formular todos os problemas,
 - o estabelecimento da ideia de $\frac{dy}{dt}$ e $\int dt$ serem inversas foi firmada graças ao método dos fluxos,
 - apresentação dos fundamentos de cálculo de várias formas diferentes,
 - Leibniz (BARON; BOS, 1985, v. 3, p. 58),
 - a diferencial de uma variável y é a diferença infinitamente pequena entre dois valores consecutivos de y ,
 - definiu como a soma de infinitas quantidades muito pequenas, Infinitésimos,
 - a soma, ou integral, $\int ydx$ é a soma de retângulos infinitamente pequenos $yxdx$, portanto $\int ydx$ é a área da curva,
 - diferenciais de ordem superiores,
 - notações simples e claras para diferenciação, integração,
 - Augustin Louis Cauchy (1789-1857) cumpriu a iniciativa de Lagrange e Gauss ao criar a Teoria dos Limites com rigor matemático. Foi possível, então, fazer uma definição precisa para “Continuidade, diferenciabilidade e integral definida em termos de conceito de Limite” (EVES, 2004, p. 610),

- Karl Weierstrass (1815-1897) e seus seguidores com a “aritimetização da álgebra”, que fortaleceu a teoria dos Limites com bases sólidas (EVES, 2004, p. 610-611).

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao final deste trabalho, acredita-se que o objetivo de produzir um texto organizando as principais informações históricas do conceito de limites, desde suas ideias mais primitivas, até a forma atual, e ainda, de suas representações, tenha sido cumprido. Foram pesquisados vários autores com a intenção de selecionar as informações e ter várias visões do assunto, uma vez que cada um dá enfoque a uma parte diferente na criação dos Limites.

A maior dificuldade encontrada durante a pesquisa foi encontrar informações de conceitos do Limite antes de Newton e Leibniz. Normalmente os livros apenas citam fatos relacionados antes do século XVII, mas raramente descrevem. Em função disso, não foi possível desenvolver um capítulo pré-século XVII com mais informações.

É possível afirmar que o conceito de Limite partiu de várias ideias e de vários matemáticos, seu desenvolvimento foi possível graças aos métodos de Newton e Leibniz. Uma vez desenvolvido o conceito de Limite, este sofreu mais melhorias do que alterações. Apesar de não terem trabalhado juntos, Newton e Leibniz tiveram ideias muito parecidas, reuniram todas as noções existentes de “Infinitésimos” e “Limite” e acrescentaram suas próprias observações, com isso conseguiram generalizar e desenvolver uma ferramenta para resolução do Cálculo com alcance muito amplo. Juntando a teoria de Newton com as notações de Leibniz obteve-se o “Cálculo”.

Chauchy na sua busca por uma teoria precisa aproximou-se mais ainda dos conceitos atuais. E por fim Weierstrass e seus seguidores aprimoraram as produções existentes com a “aritimetização da álgebra”.

Espera-se com esse trabalho ter reunido as origens do Limite e feito um levantamento dos principais matemáticos que contribuíram com a criação e desenvolvimento do mesmo até a atualidade. Foi importante para este pesquisador enquanto Professor de Matemática conhecer a história de um conteúdo tão importante para a graduação e espera-se que as informações obtidas facilitem o acesso ao estudo da história do Limite.

A HISTORICAL CONTEXTUALIZATION ABOUT LIMITS

ABSTRACT

This work was developed with the purpose of producing a text that gathers some information about the historical evolution of the concept of Limit, as well as the formalization of its concept. It was researched how this concept evolved from intuition to formality, and how its representation evolved throughout history. In addition, we sought to raise the researchers who contributed most to the evolution of the concept of Limit and how they did it. In order to meet the proposed objectives, a bibliographic survey was carried out on the History of Mathematics and the Study of Calculus in specific books. The Limit is an old concept, its most basic notions are present in Ancient Greece, but its greater development happened in century XVII and after that it was being improved, acquiring rigor. At present, some notations are the same ones that appeared in century XVII with those of derived and integral.

Keywords: Infinitesimal, Infinity, Limit.

REFERÊNCIAS

APOSTOL, T. M. **Cálculo**: cálculo com funções de uma variável: com uma introdução à Álgebra Linear. Rio de Janeiro: Editora Reverté, v. 1, 1988.

BARON, M. E.; BOS, H. J. M. **Curso de história da matemática**: origens e desenvolvimento do cálculo. Brasília: Ed. UnB, v. 3, 1985.

BARON, M. E.; BOS, H. J. M. **Curso de história da matemática**: origens e desenvolvimento do cálculo. Brasília: Ed. UnB, v. 1, 1985.

BOYER, C. B. **Cálculo**. São Paulo: Atual, 1995.

BOYER, C. B. **Historia da matemática**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

CAJORI, F. **Uma história da matemática**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2007.

CARAÇA, B. de J. **Conceitos fundamentais da matemática**. 9. ed. Lisboa: Livraria Sá da Costa, 1989.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. São Paulo: Ed. da UNICAMP, 2004.

GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, José Roberto. **Matemática**. São Paulo: FTD, 1992.

GUIMARÃES, R. A verdade e as tartarugas: a poética de Clarice Lispector. **Revista Verbo de Minas**, Juiz de Fora, v. 6, n. 11/12, 2007.

PIRES, A. S. T. **Evolução das ideias de Física**. São Paulo: Livraria da Física, 2008.

NOVA ESCOLA: a revista do professor. História da Matemática. São Paulo: Editora Abril. Edição especial, 1998.

ROSA NETO, E. **Didática da matemática**. 11. ed. rev. e ampl. São Paulo: Ática, 2002.

STEWART, J. **Cálculo**. 5.ed. São Paulo: Thonson Learning, 2006, v. 1.

Recebido em: 23/03/2017

Aprovado em: 1º/06/2017

Publicado em: 30/06/2017