

USANDO SPLINES CÚBICAS NA MODELAGEM MATEMÁTICA DA EVOLUÇÃO POPULACIONAL DE PIRAPORA/MG

José Sérgio Domingues¹
Marcela Carvalho Gonçalves²
Suélem Costa Braz³
Flávio Júnio Pereira⁴

RESUMO

O objetivo desse trabalho é obter um modelo matemático para a evolução populacional da cidade de Pirapora/MG, baseando-se apenas nos dados de censos e contagens populacionais do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). Para isso, é utilizada a interpolação por splines cúbicas, pois as técnicas de interpolação linear e polinomial, e também o modelo logístico, não se ajustam bem a essa população. Os dados analisados não são equidistantes, então, utiliza-se como amostra anos separados com passo h de 10 anos. Os valores descartados inicialmente e as estimativas populacionais para esse município, descritos pela Fundação João Pinheiro, serviram para validação do modelo construído, e para a estimativa das diferenças percentuais de previsão, que não ultrapassaram os 2,21%. Ao se considerar que o padrão de evolução populacional de 2000 a 2010 se manterá até 2020, estima-se as populações da cidade de 2011 a 2020, cuja diferença percentual média foi de apenas 0,49%. Conclui-se que o modelo se ajusta muito bem aos dados, e que estimativas populacionais em qualquer ano de 1970 e 2020 são confiáveis. Além disso, o modelo permite a visualização prática de uma aplicação dessa técnica na modelagem populacional, e, portanto, também pode ser utilizada para fins didáticos.

Palavras-chave: Splines cúbicas. Interpolação. Modelagem matemática. Evolução populacional. Pirapora.

USING CUBIC SPLINES ON MATHEMATICAL MODELING OF THE POPULATION EVOLUTION OF PIRAPORA/MG

ABSTRACT

The main objective of this paper is to obtain a mathematical model for the evolution of the population in Pirapora/MG, based only on data from censuses and population counts from Brazilian Institute of Geography and Statistics (IBGE). For this, the cubic spline interpolation is used because the technique of linear and polynomial interpolation, and also the logistic model do not fit well with this population. The analyzed data are not equidistant, then, it is used as sample, years apart with step h of 10 years. The values initially dropped and population

¹ Doutorando em Engenharia Mecânica/Bioengenharia pela Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG).

Mestre em Modelagem Matemática e Computacional pelo CEFET MG. Professor do curso de Matemática do IFMG – Campus Formiga. E-mail: sergio.domingues@ifmg.edu.br.

² Graduanda no curso de Licenciatura em Matemática do IFMG-Campus Formiga. E-mail: marcelacg00@hotmail.com

³ Graduanda no curso de Licenciatura em Matemática do IFMG-Campus Formiga. E-mail: suelemcostabe@hotmail.com

⁴ Graduando no curso de Licenciatura em Matemática do IFMG-Campus Formiga. E-mail: flaviojunio91@hotmail.com

estimates for this city, described by Fundação João Pinheiro, served to validate the constructed model, and to estimate the percentage differences of prediction, which did not exceed 2.21%. Considering that the pattern of population evolution from 2000 to 2010 will remain until 2020, it is estimated the population of the city from 2011 to 2020, whose average percentage difference was only 0.49%. The conclusion is that the model fits well to the data, and population estimates in any year from 1970 to 2020 are trustfull. Beyond, the model allows practical visualization of an application of this technique in population modeling, and therefore, it can also be used for teaching purposes.

Keywords: Cubic splines. Interpolation. Mathematical modeling. Population Evolution. Pirapora.

1 INTRODUÇÃO

Pirapora é o segundo maior polo de industrialização do Norte de Minas Gerais, sendo classificada, portanto, como uma cidade de porte médio, em relação a sua estrutura e funcionabilidade dentro de sua microrregião, isto é, sua capacidade de produção e prestação de serviços. Situa-se a cerca de 340 km de Belo Horizonte, e, segundo o último censo, tem uma população aproximada de 53.368 habitantes.

O rio São Francisco foi, durante o ciclo da mineração, importante meio de transporte para o abastecimento da região das minas. As mercadorias saíam da Bahia subindo o rio e, quando terminava o trecho navegável, seguiam por terra até os centros mineradores. A cidade nasceu justamente no ponto de baldeação, na margem direita do rio, a jusante da cachoeira de Pirapora. O topônimo de origem tupi significa *salto do peixe* ou *onde o peixe salta* – pira (peixe) e poré (salto) (IBGE, 2013; PREFEITURA..., 2012).

Até 1950, Pirapora contava com os distritos de Buritizeiro, Guaicuí, Lassance e Várzea da Palma, totalizando cerca de 30.000 habitantes. Em 1962, todos esses municípios já estavam emancipados e a administração política de Pirapora passou a ser em sua sede, com 581km² (IBGE, 2013).

Devido à sua posição estratégica, a instalação de grandes empresas na cidade entre os anos de 1970 e 1990, como LIASA S/A, em 1972, a INONIBRÁS, em 1983, e a CEDRO TEXTIL, em 1988, além das médias e pequenas empresas que são atraídas pelas grandes, um grande crescimento populacional pode ser observado nesse período, onde a população passou de 20.282 para 46.351 habitantes, o que corresponde a um aumento de aproximadamente 128,53%.

Contudo, após esse período, não houve instalação de outras grandes empresas na cidade, pelo menos empresas que necessitavam de um grande número de funcionários, fazendo com

que o crescimento acelerado ocorrido de 1970 até 1990 fosse reduzido. Atualmente, após um período maior que o do grande aumento mencionado, a população de Pirapora é apenas cerca de 15,80% maior do que era em 1990.

Desde 1973, o IBGE atua no campo das projeções populacionais brasileiras, utilizando o Método das Componentes Demográficas, que considera as três componentes da dinâmica populacional: mortalidade, fecundidade e migração. Sendo assim, as projeções feitas com essa metodologia proporcionam a formulação de várias hipóteses referentes a diversos cenários (FREIRE, 2001; IBGE, 2008).

Com o intuito de obter um modelo matemático que apenas com os dados populacionais dos últimos recenseamentos e contagens populacionais possa obter estimativas populacionais próximas às obtidas pelo IBGE e pela Fundação João Pinheiro, foram analisados alguns métodos de interpolação de pontos já conhecidos na literatura e também um conhecido modelo de crescimento populacional, o *modelo logístico* (BOYCE; DIPRIMA, 2009; SANTOS, 2012, 2013).

Analisando o trabalho de Gonçalves et al. (2013) para a obtenção dos parâmetros do modelo logístico baseando-se nos dados populacionais de Pirapora, ficou claro que, com a técnica de diferenças finitas utilizada, os dados da evolução populacional dessa cidade não se adequam de maneira satisfatória a esse modelo. Além disso, após uma sucinta discussão sobre métodos de interpolação, concluiu-se que os principais deles não são uma boa opção quando se quer uma curva que represente esses dados de maneira mais realista.

Sendo assim, apresenta-se neste artigo um modelo matemático da evolução populacional de Pirapora no período entre 1970 e 2020, utilizando o processo de interpolação por splines cúbicas, que é uma das técnicas que podem ser utilizadas para inferir valores intermediários a partir de uma série de dados conhecidos, com o uso de fórmulas matemáticas ou procedimentos gráficos (SHRYOCK; SIEGEL, 1980). Para um melhor entendimento, também é apresentada uma sucinta revisão sobre essa técnica numérica, focando em sua utilização.

A validação do modelo foi feita com a utilização de dados populacionais não considerados para a construção da spline. Para anos anteriores a 2010, os dados utilizados foram os fornecidos pelo IBGE (2013); e para anos posteriores a 2010, os dados utilizados foram os da Fundação João Pinheiro (2009), já que estimativas populacionais para Pirapora para anos posteriores a 2013 não foram calculadas pelo IBGE (2013). Contudo, o método de projeção populacional da Fundação João Pinheiro, denominado *Apportionment Method*, refere-se a uma

pequena adaptação do método utilizado pelo IBGE, fazendo com que essas duas instituições apresentem projeções com valores muito próximos. Portanto, acredita-se que, mesmo se todos os dados utilizados fossem do IBGE, os resultados ainda seriam muito próximos dos que foram obtidos nessa análise.

2 DESCARTANDO OUTRAS FORMAS DE MODELAGEM

O objetivo desta seção é apresentar os dados oficiais dos números de habitantes em Pirapora em determinados anos e usá-los para demonstrar que o modelo logístico não se adequa bem a esses dados, além de justificar a não utilização de algumas formas de interpolação para a modelagem populacional desejada.

2.1 O modelo logístico

Santos (2012, 2013) apresenta um trabalho sobre o crescimento logístico da população brasileira, onde, a partir do problema de valor inicial (PVI) que representa o modelo logístico e dos dados dos recenseamentos de 1950 a 2000, obtêm-se os melhores parâmetros para o modelo e é feita a comparação dos dados obtidos com as estimativas do IBGE para os anos de 2007, 2008 e 2010. Gonçalves et al. (2013) utilizam a mesma ideia para permitir a exclusão da possibilidade de utilização do modelo logístico ao crescimento populacional de Pirapora, ao se obter os valores de parâmetros utilizando-se a técnica de diferenças finitas, concluindo que os dados da evolução populacional dessa cidade não se adequam de maneira satisfatória a esse modelo. Um resumo do trabalho de Gonçalves et al. (2013) pode ser visualizado abaixo.

De acordo com o IBGE, a população da cidade, desde a sua emancipação, foi dada pelos valores descritos na Tabela 1.

Tabela 1 – População de Pirapora em função dos anos

Ano (x)	População (y)
1970	20.282
1980	32.673
1991	46.351
1996	48.291
2000	50.300
2007	51.636
2010	53.368

Fonte: IBGE (2013).

Como em 1990 não houve censo, foi utilizada a população 46.100 habitantes, informada por uma estimativa feita pela prefeitura da cidade (PREFEITURA..., 2012).

Supondo-se que a população de Pirapora siga o modelo logístico, podemos escrevê-lo como um PVI da forma

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = ky(y_M - y), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \quad (2.1)$$

sendo k e a população máxima y_M constantes a serem determinadas.

A solução do PVI (1) é escrita da forma

$$y(t) = \frac{y_M}{1 + \left(\frac{y_M - y_0}{y_0}\right) e^{-y_M k(t - t_0)}} \quad (2.2)$$

Ao se considerar que o modelo logístico pode ser escrito da forma $\frac{1}{y} \frac{dy}{dt} = ay + b$, em que $a = -k$ e $b = ky_M$, e se aproximar a derivada $y'(t_i)$ para cada ano t_i em que se conhece as populações, pela média aritmética das aproximações por diferenças finitas para frente e para trás, dadas por g_i e h_i , respectivamente, ou seja

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dt} = ay(t_i) + b \approx \frac{g_i + h_i}{2}, \quad (2.3)$$

sendo $g_i = \frac{1}{y_i} \frac{y_{i+1} - y_i}{t_{i+1} - t_i}$ e $h_i = \frac{1}{y_i} \frac{y_i - y_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}$, demonstra-se, com a utilização de quadrados mínimos, que $k = -a = 1,8 \cdot 10^{-6}$ e que $b = 0,0972$. Com isso, é possível verificar que a curva logística apresenta uma diferença muito significativa em relação aos dados utilizados, além de também se verificar que $y_M = 54.000$, o que é um absurdo, já que, para 2013, por exemplo, admite-se que a população de Pirapora é de 55.704 habitantes (IBGE, 2013).

Portanto, ao se utilizar o modelo logístico, obtém-se uma população máxima para a cidade bem abaixo da população que ela já possui, inviabilizando a utilização dessa técnica de modelagem populacional.

2.2 Algumas formas de interpolação

Interpolação é uma técnica para estimar valores de uma função f quando esta é desconhecida ou de difícil manipulação, mas quando se conhece um conjunto discreto de valores de f .

Para dados populacionais, onde $(x, y) = (\text{ano}, \text{população})$, é de se esperar que, na transição de um ponto (x_i, y_i) para outro (x_{i+1}, y_{i+1}) , a curva que representa a evolução populacional seja suave.

É claro que, por construção, essa suavização não ocorre nas splines lineares, uma vez que elas são compostas por segmentos de reta, o que justifica a sua não utilização.

Além disso, para a obtenção de um modelo com certo grau de confiabilidade, é necessário fazer uso de vários pontos (x_i, y_i) . Assim, a utilização de um único polinômio interpolador também não é considerada, pois ele teria grau elevado, gerando oscilações indesejadas na evolução populacional, que fatalmente não se adequariam à realidade. É claro que esse raciocínio vale para qualquer técnica de interpolação polinomial, como, por exemplo, as técnicas de diferenças divididas de Newton, Lagrange ou de Bernstein.

A falta de suavidade da interpolação linear, o excesso de oscilação gerado pela utilização de polinômios interpoladores e o limite populacional máximo bem inferior à população atual de Pirapora fazem com que, neste trabalho, seja utilizada a interpolação segmentada, que é aquela onde se considera funções por partes, sendo que, para cada subintervalo definido no modelo, ter-se-á uma função interpoladora diferente.

Aqui, optou-se pela utilização das splines cúbicas, pois geram funções por partes de classe C^2 e, por serem cúbicas em cada uma das partes, não geram oscilações excessivas.

3 INTERPOLAÇÃO POR SPLINES CÚBICAS: UMA REVISÃO

Uma Spline Cúbica é uma função polinomial contínua por partes e de grau menor ou igual a 3 em cada uma delas. Cada parte $y_k(x)$ está definida no intervalo $[x_{k-1}, x_k]$, com k percorrendo o conjunto $\{1, 2, 3, \dots, n\}$. A vantagem de se interpolar pontos no plano com splines cúbicas é que, como as expressões que a compõem são, no máximo, de grau 3, ela terá as derivadas de primeira e segunda ordens contínuas, evitando que picos sejam formados e que mudanças bruscas de curvatura sejam sofridas nos nós (ou pontos). Ou seja, consegue-se suavização na transição de um nó para outro (COLLINS, 2012; KIRCHNER et al., 1989; MENEZES; DUARTE, 2010; RUGGIERO; LOPES, 2010; THANT; AYE, 2009; WOLBERG; ALFY, 2012).

Definição: Suponha que para $(n + 1)$ valores de x_i com $i = 0, 1, 2, \dots, n$, sejam conhecidas as imagens $f(x_i)$ por uma função desconhecida $f(x)$. A função Y_3 será chamada de Spline cúbica

interpolante de $f(x)$ nos nós x_i se existirem n polinômios de grau menor ou igual a 3, denotados por $y_k(x)$, $k = 1, 2, \dots, n$, de forma que satisfaçam as seguintes condições:

$$C_1: Y_3(x) = y_k(x) \text{ para } x \in [x_{k-1}, x_k], k = 1, 2, \dots, n.$$

$$C_2: Y_3(x_i) = f(x_i), i = 0, 1, \dots, n.$$

$$C_3: y_k(x_k) = y_{k+1}(x_k), k = 1, 2, \dots, (n - 1).$$

$$C_4: y'_k(x_k) = y'_{k+1}(x_k), k = 1, 2, \dots, (n - 1).$$

$$C_5: y''_k(x_k) = y''_{k+1}(x_k), k = 1, 2, \dots, (n - 1).$$

Observa-se que as condições C_3, C_4 e C_5 permitem garantir que as funções polinomiais que determinam a spline são de classe C^2 , ou seja, nos intervalos para os quais estão definidas, possuem derivadas contínuas até a segunda ordem. Além disso, como cada y_k deve ser de grau ≤ 3 , com $k = 1, 2, \dots, n$, nota-se que, pela primeira condição C_1 , uma spline cúbica será uma função definida por partes, da seguinte forma:

$$Y_3 = \begin{cases} a_1(x - x_1)^3 + b_1(x - x_1)^2 + c_1(x - x_1) + d_1, & x \in [x_0, x_1] \\ a_2(x - x_2)^3 + b_2(x - x_2)^2 + c_2(x - x_2) + d_2, & x \in [x_1, x_2] \\ \vdots & \vdots \\ a_n(x - x_n)^3 + b_n(x - x_n)^2 + c_n(x - x_n) + d_n, & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases} \quad (3.1)$$

Pela Equação (3.1), conclui-se que, para se obter Y_3 é necessário que sejam determinados 4 coeficientes para cada um dos n valores assumidos por k , isto é, deve-se determinar $4n$ coeficientes. São eles:

$$a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2, \dots, a_n, b_n, c_n, d_n.$$

Se as condições para que Y_3 seja uma Spline cúbica interpolante de $f(x)$ em todos os x_i forem impostas, é possível provar que a determinação de cada um desses $4n$ coeficientes pode ser feita resolvendo-se um sistema matricial $Ag = b$, sendo que, quando se define

$$g_k = y''_k, \quad h_k = x_k - x_{k-1}, \quad f(x_k) = f_k,$$

demonstra-se que

$$a_k = \frac{g_k - g_{k-1}}{6h_k}, \quad b_k = \frac{g_k}{2}, \quad c_k = \left[\frac{f_k - f_{k-1}}{h_k} + \frac{2h_k g_k + h_k g_{k-1}}{6} \right] \text{ e } d_k = f_k \quad (3.2)$$

Além disso, para que o sistema tenha solução única, considera-se a Spline cúbica natural, ou seja, define-se que $g_0 = g_n = 0$ (KIRCHNER et al., 1989; RUGGIERO; LOPES, 2010).

Uma forma sucinta de se escrever o sistema $Ag = b$ é

$$h_k g_{k-1} + 2(h_k + h_{k+1})g_k + h_{k+1}g_{k+1} = 6 \left(\frac{f_{k+1} - f_k}{h_{k+1}} - \frac{f_k - f_{k-1}}{h_k} \right) \quad (3.3)$$

que é muito útil na construção do sistema que terá por objetivo determinar os valores de g_k , para, posteriormente, serem encontrados os valores dos coeficientes que irão compor cada um dos y_k .

4 INTERPOLANDO OS DADOS POPULACIONAIS

O objetivo desta seção é utilizar os dados apresentados na Tabela 1 para a determinação dos valores dos parâmetros necessários para a obtenção da spline cúbica que representará a evolução populacional de Pirapora. Nenhum valor populacional anterior a 1970 foi utilizado, devido ao fato de a emancipação da cidade ter ocorrido apenas em 1962, o que significa que valores anteriores a 1970 representam populações dessa cidade juntamente com as de outros municípios.

Para facilitar a utilização dos dados, considerou-se para a determinação da Spline cúbica que $h_k = 10$ para todo $1 \leq k \leq n$. Tem-se, então, quatro subdivisões no intervalo [1970, 2010], o que implica que $n = 4$ e que é necessário determinar $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ e $y_4(x)$, pela resolução do sistema apresentado pela Equação (3.3) para $1 \leq k \leq 3$.

Para isso, foram utilizados os seguintes pontos:

$$\begin{aligned} (x_0, f(x_0)) &= (1970, 20.282), & (x_1, f(x_1)) &= (1980, 32.673) \\ (x_2, f(x_2)) &= (1990, 46.100), & (x_3, f(x_3)) &= (2000, 50.300) \\ & & (x_4, f(x_4)) &= (2010, 53.368). \end{aligned}$$

Porém, como se considera que $h_k = 10$, esse sistema pode ser reescrito da forma:

$$10g_{k-1} + 40g_k + 10g_{k+1} = \frac{6}{10}(f_{k+1} - 2f_k + f_{k-1}) \quad (4.1)$$

com $k = 1, 2, 3$. Fazendo-se isso e observando que $g_0 = g_n = 0$, obtém-se:

$$\begin{cases} 40g_1 + 10g_2 & = 0,6(f_2 - 2f_1 + f_0) \\ 10g_1 + 40g_2 + 10g_3 & = 0,6(f_3 - 2f_2 + f_1) \\ 10g_2 + 40g_3 & = 0,6(f_4 - 2f_3 + f_2) \end{cases} \quad (4.2)$$

Efetuada-se a substituição dos valores de f_0, f_1, f_2, f_3 e f_4 respectivamente por 20.282, 32.673, 46.100, 50.300 e 53.368, obtém-se o seguinte sistema matricial:

$$\begin{pmatrix} 40 & 10 & 0 \\ 10 & 40 & 10 \\ 0 & 10 & 40 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 621,6 \\ -5.536,2 \\ -679,2 \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

A resolução desse último sistema, pelo método da Eliminação de Gauss, forneceu como solução, com aproximação de duas casas decimais, os seguintes valores:

$$g_1 = 54,98, \quad g_2 = -157,77 \text{ e } g_3 = 22,46.$$

Com os valores determinados para g_1, g_2 e g_3 , utilizou-se as expressões da Equação (3.2) para obter os valores dos coeficientes a_k, b_k, c_k e d_k , que podem ser visualizados na Tabela 2.

Tabela 2 – Valores obtidos para os coeficientes que determinam a Spline

a_i	Valor	b_i	Valor	c_i	Valor	d_i	Valor
a_1	0,92	b_1	27,49	c_1	1.422,37	d_1	32.673
a_2	-3,55	b_2	-78,89	c_2	908,43	d_2	46.100
a_3	3,00	b_3	11,23	c_3	231,92	d_3	50.300
a_4	-0,37	b_4	0,00	c_4	344,23	d_4	53.368

Esses coeficientes são todos os necessários para a obtenção de cada uma das quatro partes da spline cúbica procurada.

5 RESULTADOS

Com os valores descritos na Tabela 2, determinou-se com clareza cada uma das quatro partes da spline que interpola os pares ordenados $(x_i, f(x_i)) = (ano, população)$ que se procurava, fazendo-se, assim, a modelagem matemática da evolução populacional dessa cidade ao longo do período estudado.

O resultado obtido foi:

$$Y_3 = \begin{cases} 0,92(x - 1.980)^3 + 27,49(x - 1.980)^2 + 1422,37x - 2,78 \times 10^6, & x \in [1.970, 1.980] \\ -3,55(x - 1.990)^3 - 78,89(x - 1.990)^2 + 908,43x - 1,76 \times 10^6, & x \in [1.980, 1.990] \\ 3,00(x - 2.000)^3 + 11,23(x - 2.000)^2 + 231,92x - 4,14 \times 10^5, & x \in [1.990, 2.000] \\ -0,37(x - 2.010)^3 + 344,23x - 6,39 \times 10^5, & x \in [2.000, 2.010] \end{cases} \quad (5.1)$$

Para analisar a validade do modelo proposto, comparou-se a população oficial (Pop. Of.) dos anos de 1991, 1996 e 2007 com a população virtual (Pop. virtual) para esses mesmos anos, geradas pela spline cúbica encontrada. Com isso, determinou-se a porcentagem de diferença do modelo proposto em relação aos dados informados pelo IBGE (2013), que se mostrou muito baixa, conforme se observa na Tabela 3.

Tabela 3 – Taxas percentuais de diferença para os três anos

Ano(x)	Pop. Of.	Pop. Virtual	Diferença
1991	46.351	46.935	1,26%
1996	48.291	49.360	2,21%
2007	51.636	52.345	1,37%

Dessa forma, conclui-se que os anos que não foram utilizados para determinação da spline ajustam-se relativamente bem à sua curva, pois o erro médio é de 1,61% em relação às previsões do IBGE. Com isso, o modelo pode ser utilizado para se tomar conhecimento da população de Pirapora em qualquer ano no intervalo fechado [1970, 2010], sempre levando em conta a possibilidade de um pequeno erro.

Conforme já mencionado, o grande crescimento populacional da cidade entre os anos de 1970 e 1990 se deve, principalmente, à instalação de grandes empresas nesse intervalo. Como esse fenômeno não se repetiu após esse período, é possível conjecturar que a mesma forma de crescimento da população entre os anos de 2000 e 2010 se manterá no intervalo [2011, 2020]. Neste cenário, o modelo proposto indica que a população de Pirapora nos anos de 2011, 2012, 2013 e 2020 será de aproximadamente 53.712, 54.054, 54.391 e 56.440 habitantes, respectivamente, contra 54.215, 54.449, 54.672 e 56.008 previstos pela Fundação João Pinheiro (2009). Para esses valores, o modelo apresenta um erro de apenas 0,94% para 2011; de 0,73% para 2012; de 0,52% para 2013; e de 0,77% para 2020.

Sendo assim, para esses quatro anos analisados, que estavam inicialmente fora do domínio da spline, a diferença média em relação ao referido órgão é de apenas 0,74%. As diferenças percentuais entre todos os anos de 2011 a 2020 podem ser visualizadas na Tabela 4 e apresentam média aritmética de apenas 0,49%.

Tabela 4 – Taxas percentuais de diferença de 2011 a 2020

Ano(x)	Pop. Of.	Pop. Virtual	Diferença
2011	54.215	53.712	0,94%
2012	54.449	54.054	0,73%
2013	54.672	54.391	0,52%
2014	54.885	54.721	0,30%
2015	55.089	55.043	0,08%
2016	55.285	55.353	0,12%
2017	55.475	55.651	0,32%
2018	55.658	55.932	0,49%
2019	55.836	56.196	0,64%
2020	56.008	56.440	0,77%

A curva que representa a spline determinada, sendo o domínio considerado como os valores pertencentes ao intervalo [1970, 2020], pode ser visualizada no Gráfico 1, juntamente com os pontos que foram utilizados para a sua determinação e também aqueles utilizados para a validação do modelo. Com isso, é possível visualizar o bom acordo entre a curva obtida e os dados populacionais testados.

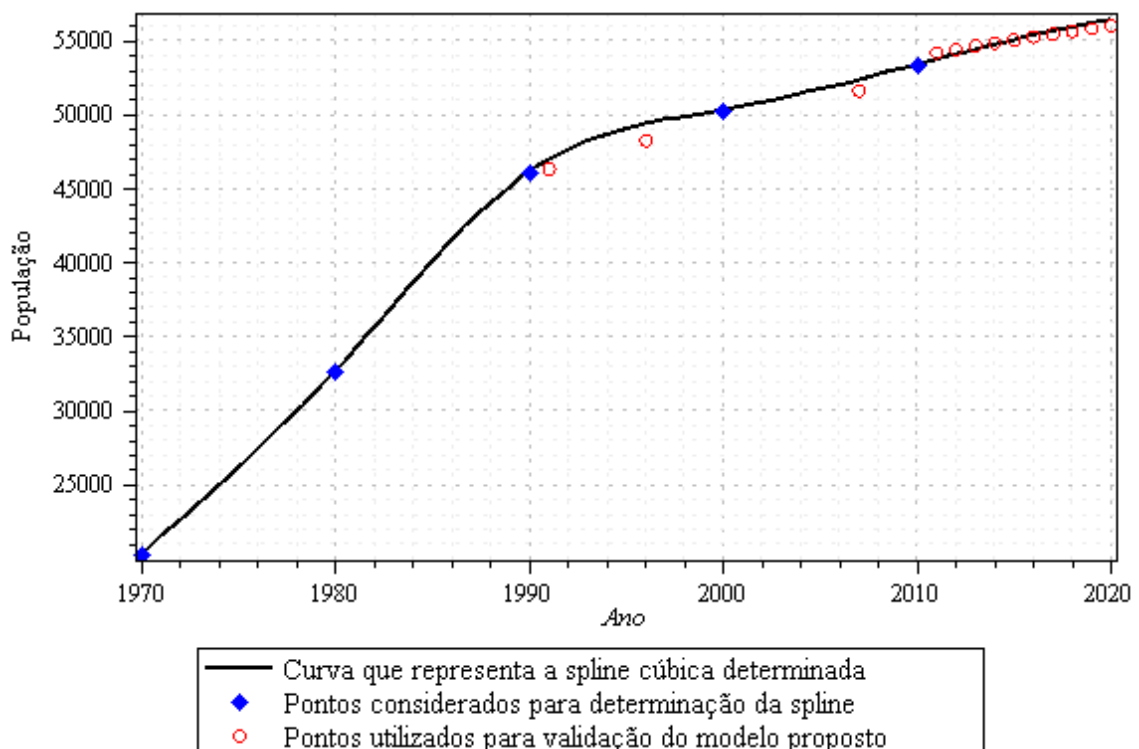


Gráfico 1 – Representação gráfica da spline cúbica que interpola os pontos analisados em comparação com as previsões do modelo

Portanto, pode-se considerar que o modelo apresentado neste trabalho tem grande fidelidade aos dados oficiais do IBGE (2013) e da Fundação João Pinheiro (2009), tendo visto

as pequenas diferenças percentuais de estimativas populacionais. Isso permite a validação do modelo proposto, indicando que a utilização de splines cúbicas para a modelagem da evolução populacional de Pirapora é uma técnica perfeitamente utilizável.

6 CONCLUSÕES

A partir deste trabalho, pôde-se observar que o método de interpolação de pontos por splines cúbicas adequou-se bem à evolução populacional da cidade de Pirapora, situada no Norte de Minas Gerais. É claro que a curva que representa a spline teria que passar pelos pontos considerados para determiná-la, pois ela é construída para isso. Contudo, o que não se poderia garantir é que ela também se ajustaria muito bem aos outros pontos $(x_i, f(x_i))$ que representam a população da cidade, $f(x_i)$, e o seu ano corresponde x_i .

Verificou-se que a diferença percentual máxima para os anos de 1991, 1996 e 2007 testada na spline foi de 2,21%, com média de 1,61%. Além disso, quando se considera que a forma de crescimento da população entre os anos de 2000 e 2010 se manterá até 2020, o modelo se mostrou ainda mais fiel, com diferença média de apenas 0,49% em relação às previsões da Fundação João Pinheiro, que utiliza técnica de estimativa muito parecida com a do IBGE.

Acredita-se que esse bom ajuste da spline cúbica aos dados populacionais dessa cidade se deve, principalmente, à propriedade que essas funções possuem de que derivadas de primeira e segunda ordem são contínuas, impossibilitando que picos sejam formados na construção das curvas e que mudanças bruscas de concavidade ocorram nos pontos, visto que essas características matemáticas são também as características observadas no crescimento populacional de Pirapora. Contudo, nada se pode afirmar sobre a possibilidade de esse ajuste também ser tão bem-sucedido para estimar populações de outras cidades ou estados brasileiros, uma vez que cada uma dessas localidades possuem características próprias, que podem impedir essa qualidade de ajuste.

Sendo assim, conclui-se que a spline que foi determinada pode ser útil na estimação da população de Pirapora, em qualquer ano entre 1970 e 2020, com erro de aproximação consideravelmente pequeno, o que não se conseguiria por outras técnicas de interpolação de pontos e nem pelo modelo logístico.

Além disso, a apresentação clara de uma das aplicações de splines cúbicas na estimativa populacional pode servir de motivador para alunos de diversos cursos superiores que precisam estudar métodos de interpolação, como acadêmicos de Licenciatura e Bacharelado em

Matemática, Física e Química, Engenharias, Administração, dentre outros; tendo, portanto, uma utilidade didática para auxílio no ensino e entendimento dessa técnica de interpolação.

Agradecimentos: Os autores agradecem ao revisor anônimo, cujas sugestões e comentários construtivos auxiliaram na melhoria significativa do texto apresentado neste trabalho.

REFERÊNCIAS

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Elementary differential equations and Boundary value problems**. 9. ed. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2009.

COLLINS, G. W. **Fundamental numerical methods and data analysis**, Harvard University. Disponível em: <<http://ads.harvard.edu/books/1990fnmd.book/>>. Acesso em: 12 nov. 2012.

FREIRE, P. H. M. A. **Projeção populacional para pequenas áreas pelo método das componentes demográficas usando estimadores bayesianos espaciais**. 2001. 129 f. Tese (Doutorado em Demografia) – Centro de Desenvolvimento e Planejamento Regional, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2001.

FUNDAÇÃO JOÃO PINHEIRO. **Projeção da população municipal de Minas Gerais: 2009-2020**, 2009. Disponível em: <<http://www.fjp.mg.gov.br/index.php/servicos/81-servicos-cei>>. Acesso em: 23 dez. 2012.

GONÇALVES, M. C. et al. Evolução populacional de Pirapora-MG: um exemplo de inadequação do modelo de crescimento logístico. In: SEMANA DA MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNCIA, XIII., 2013, Uberlândia. **Anais...** Uberlândia: SEMAT UFU, 2013.

INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA (IBGE). Projeção da população do Brasil por sexo e idade 1980-2050: revisão 2008. **Estudos e Pesquisas, Informação Demográfica e Socioeconômica**, Rio de Janeiro, n. 24, 2008.

_____. **Cidades**. Disponível em: <<http://www.ibge.gov.br/cidadesat/index.php>>. Acesso em: 17 fev. 2013.

KIRCHNER, F. F. et al. O uso de funções Spline no cálculo de volume de árvores. **Revista Florestal**, v. 19, p. 116-112, 1989.

MENEZES, I. B.; DUARTE, M. A. Q. Métodos de interpolação polinomial. In: ANAIS DO ENCONTRO DE INCIAÇÃO CIENTÍFICA (ENIC), 8., 2010, Mato Grosso do Sul. **Anais...** Mato Grosso do Sul: UEMS, v. 1, n. 1(2), 2010.

PREFEITURA MUNICIPAL DE PIRAPORA. Disponível em: <<http://www.pirapora.mg.gov.br/>>. Acesso em: 07 nov. 2012.

RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. R. **Cálculo Numérico**: aspectos teóricos e computacionais. 2. ed. São Paulo: Makron Books, Pearson, 2010.

SANTOS, R. J. **Crescimento logístico da população do Brasil**, 2011. Disponível em: <<http://www.mat.ufmg.br/~regi/eqdif/popbrasil.pdf>>. Acesso em: 21 dez. 2012.

_____. **Introdução às equações diferenciais ordinárias**. Belo Horizonte: Imprensa Universitária da UFMG, 2013.

SHRYOCK, H. S.; SIEGEL, S. J. **The methods and material of demography**. Washington: U. S. Government Printing Office, 1980.

THANT, A. A.; AYE, K. K. Application of Cubic Spline Interpolation to Walking Patterns of Biped Robot. **World Academy of Science, Engineering and Technology**, v. 50, p. 27-34, 2009.

WOLBERG, G.; ALFY, A. **Monotonic Cubic Spline Interpolation**. Disponível em: <<http://www.univie.ac.at/nuhag-php/bibtex/openfiles/692310.1.1.7.1055.pdf>>. Acesso em: 28 set. 2012.

Recebido em: 08/09/2013

Aprovado em: 06/01/2014