

MÉTODOS NUMÉRICOS DE INTEGRAÇÃO APLICADOS NO CÁLCULO DE CAMPOS MAGNÉTICOS GERADOS POR LINHAS DE TRANSMISSÃO¹

Paula Carvalho Resende²
Natália Rodrigues de Melo³
Gustavo Lobato Campos⁴
Mariana Guimarães dos Santos⁵

RESUMO

Os campos magnéticos gerados por linhas de transmissão estão sendo investigados desde a década de 60, devido à ligação da exposição a esses campos com determinadas patologias. Historicamente, o cômputo dos níveis de campos magnéticos produzidos por linhas de transmissão é realizado por métodos analíticos. O presente artigo tem por objetivo calcular tais campos por meio de métodos numéricos de integração aplicados à Lei de Biot-Savart. Desta forma, a modelagem magnética e os métodos de integração de Newton-Cotes e Quadratura de Gauss são apresentados. O cômputo do campo magnético é feito por meio do software Matlab® e para melhor visualização da eficácia dos métodos numéricos, o número de pontos de integração é variado. Os níveis de campo magnético obtidos são comparados por com cálculo analítico por meio da Lei de Ampère e medições reais de duas linhas de transmissão do Sistema Furnas. Apesar da melhoria na precisão dos resultados com o aumento do número de pontos de integração para ambos os métodos numéricos, nenhum desses obteve resultados ótimos como o cálculo analítico em comparação com as medições. Este resultado mostra que os métodos numéricos em sua maioria são empregados em cálculos mais complicados e geometrias de linhas de transmissão mais complexas.

Palavras-chave: Campo magnético. Integração numérica. Linha de transmissão.

1 INTRODUÇÃO

O Brasil possui um sistema de linhas de transmissão (LTs) que interliga todo o território nacional, responsável pelo fornecimento de energia aos grandes, médios e pequenos

¹ **Como citar este artigo:**

REZENDE, P. C.; MELO, N. R.; CAMPOS, G. L. Métodos numéricos de integração aplicados no cálculo de campos magnéticos gerados por linhas de transmissão. **ForScience**: revista científica do IFMG, Formiga, v. 5, n. 3, e00295, jul./dez. 2017.

² Mestranda em Engenharia Elétrica pelo Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais (CEFET-MG). E-mail: pcarvalhoresende@gmail.com. Currículo Lattes: <http://lattes.cnpq.br/4425879041210715>.

³ Mestranda em Engenharia Elétrica Eletromagnetismo Aplicado pela Universidade Federal de São João Del Rei (UFSJ). E-mail: nathyrmelo@yahoo.com.br. Currículo Lattes: <http://lattes.cnpq.br/1790350244865693>.

⁴ Doutor em Engenharia Nuclear e professor efetivo do Instituto Federal Minas Gerais (IFMG) – Campus Formiga. Email: gustavo.lobato@ifmg.edu.br. Currículo Lattes: <http://lattes.cnpq.br/9613750934178733>.

⁵ Mestra em Engenharia Elétrica pela UFSJ/CEFET e professora efetiva do IFMG – Campus Formiga. E-mail: mariana.santos@ifmg.edu.br. Currículo Lattes: <http://lattes.cnpq.br/4661598896242893>.

ForSci.: r. cient. IFMG, Formiga, v. 5, n. 3, e00295, jul./dez. 2017.

centros consumidores. Por motivos físicos e econômicos é necessário elevar a tensão nas linhas de transmissão, o que faz com que os níveis de corrente também sejam elevados. Como resultado, tem-se altos níveis de interferência eletromagnética nas proximidades das linhas de transmissão. A elevação desses níveis pode ser nociva a estruturas e seres vivos que estejam posicionados na faixa de passagem das linhas de transmissão (MORENO, 2001).

Alguns estudos relacionam à exposição a campos magnéticos com determinadas patologias que afetam a saúde humana. Diversos estudos já foram realizados com o intuito de analisar o efeito na saúde humana da exposição a campos magnéticos. Os resultados das pesquisas mostram que o campo magnético possui grande poder de penetração na pele e pode ser definido como carcinogênico, isto é, não possui a capacidade de iniciar um câncer, mas pode promover a reprodução de células geneticamente alteradas (LOPES, 2009).

Além disso, os campos magnéticos podem causar interferência na rede de comunicação e em dispositivos elétricos e eletrônicos, além de rádio interferência e ruídos audíveis (CLAYTON, 2006; ICNIRP, 1998; SANTOS, 2011).

Os valores limites de exposição humana ao campo magnético devem estar de acordo com os limites estabelecidos pelas normas adotadas pelo país de residência. No Brasil, a resolução normativa nº 398 da Agência Nacional de Energia Elétrica (ANEEL), estabelece os limites à exposição humana a campos magnéticos para o público geral e ocupacional, sendo de 200 μT e 1000 μT respectivamente. A população ocupacional compreende adultos expostos a campos eletromagnéticos devido à atividade ocupacional. Entende-se como público em geral, indivíduos de todas as idades não integrantes da população ocupacional (ANEEL, 2010).

Atualmente, os níveis de campo magnético são frequentemente determinados através de medições, o que também representa um problema, pois o operador fica exposto ao campo por um longo período de tempo, dependendo da extensão da linha de transmissão. Além disso, algumas linhas passam por rotas de difícil acesso, dificultando as medições (ABNT, 1985).

Considerando a importância na estimativa dos níveis de campos magnéticos gerados nas proximidades das linhas de transmissão, este artigo tem como objetivo calcular, por meio das Lei de Ampère e de Biot-Savart, os campos magnéticos gerados por duas configurações reais de LT. A Lei de Ampère será calculada de forma analítica e a Lei de Biot-Savart utilizando Quadratura de Gauss-Legendre e Newton-Cotes, sendo todos os algoritmos

implementados no *software* Matlab®. Os resultados computacionais obtidos serão comparados com medidas reais de campo magnético com o intuito de identificar qual método apresenta resultados mais próximos dos valores medidos.

2 MODELAGEM DO CAMPO MAGNÉTICO

Antes de apresentar as modelagens de campo magnético para cálculo, é necessário estabelecer algumas premissas relevantes das LTs. Importa ressaltar também que para a maioria das modelagens eletromagnéticas há aproximações físicas e matemáticas.

As linhas de transmissão em questão são aéreas, trifásicas, simétricas e balanceadas. Deste modo, a amplitude da tensão de operação é igual para as três fases que têm defasamentos de 120° e operam em estado permanente, ou seja, na frequência de 60 Hz.

A corrente de uma linha de transmissão varia de acordo com a demanda de energia dos seus usuários. Assim, a corrente utilizada para o cálculo é a corrente média da linha de transmissão. A corrente dos cabos para raio não é considerada nos cálculos, porque são pequenas correntes induzidas pelos cabos de fase.

2.1 Lei de Ampère

A Lei de Ampère estabelece em sua forma integral, apresentada na Equação (1) (SHADIKU, 2004), que a integral de linha da componente tangencial do campo magnético, H [A/m], em volta de um caminho fechado, é igual à corrente de contorno, I_C [A], envolvida nesse caminho.

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{J}_C \cdot d\vec{S} = I_C \quad (1)$$

Os cabos condutores de uma linha de transmissão têm forma cilíndrica. Além disso, o comprimento do cabo condutor é da ordem dos quilômetros, sendo assim aceitável aproximá-los a condutores com comprimentos que tendem para o infinito (SHADIKU, 2004).

Assim, para um condutor cilíndrico de comprimento infinito, considerando constante a distância vertical entre o ponto da fonte de campo e o ponto de observação, ρ , a Equação (1) pode ser reduzida para Equação (2) (SHADIKU, 2004).

$$\vec{H} = \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot \rho} \cdot \hat{a}_\phi \left[\frac{A}{m} \right] \quad (2)$$

Onde $I[A]$ é a corrente que flui através da linha de transmissão, $\rho [m]$ é a distância vertical entre o ponto de origem e o ponto de observação do campo magnético e \hat{a}_ϕ é o produto cruzado entre o vetor de corrente (\hat{a}_L) e o vetor posição (\hat{a}_ρ). Este último estabelecido na Equação (3) (SHADIKU, 2004), que indica o sentido e direção do campo magnético no ponto de observação.

$$\hat{a}_\phi = \hat{a}_L \times \hat{a}_\rho \quad (3)$$

2.2 Lei de Biot-Savart

A Lei de Biot-Savart em sua forma vetorial, apresentada na Equação (4), estabelece que a intensidade do campo magnético ($d\vec{H}$) gerada em um ponto (P) pelo elemento diferencial ($I d\vec{l}$) é igual ao produto vetorial entre ($I d\vec{l}$) e o vetor unitário (\hat{a}_R) e é inversamente proporcional ao quadrado da distância R entre (P) e o elemento diferencial de corrente.

$$d\vec{H} = \frac{I d\vec{l} \times \hat{a}_R}{4\pi R^2} \left[\frac{A}{m} \right] \quad (4)$$

$$\text{Em que } R = |\vec{R}| \text{ e } \hat{a}_R = \vec{R}/R.$$

A orientação do campo magnético ($d\vec{H}$) pode ser determinada pela regra da mão direita. Para determinar o campo devido a uma corrente que percorre um condutor filamento retilíneo de comprimento finito, assume-se que o condutor está ao longo do eixo z . Desta forma, a partir da Equação (4), considerando $d\vec{l} = dz\hat{a}_z$ e $\vec{R} = \rho\hat{a}_\rho - z\hat{a}_z$, o produto vetorial resulta em $d\vec{l} \times \vec{R} = \rho dz\hat{a}_\phi$ e obtém-se a Equação (5) (SHADIKU, 2004).

$$\vec{H} = \int \frac{I \rho dz}{4\pi[\rho^2 + z^2]^{3/2}} \hat{a}_\phi \left[\frac{A}{m} \right] \quad (5)$$

Onde I [A] é a corrente que flui através da linha de transmissão, ρ [m] é a distância vertical entre o ponto de origem e o ponto de observação do campo magnético e \hat{a}_θ é o produto cruzado entre o vetor de corrente (\hat{a}_L) e o vetor posição (\hat{a}_ρ), estabelecido na Equação (3).

A relação entre o campo magnético H [A/m] e a densidade de fluxo magnético B [T], conhecida como relação constitutiva, é demonstrada na Equação (6), em que μ_0 [T·m/A] é a permeabilidade magnética no vácuo (SHADIKU, 2004).

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{H} [T] \quad (6)$$

Desta forma, para resolver a Lei de Biot-Savart para cálculo de campo magnéticos em LTs, utilizam-se os métodos de integração numérica conhecidos como Quadratura de Gauss-Legendre e método trapezoidal de Newton-Cotes, apresentados na seção 3.

3 INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

3.1 Quadratura de Gauss-Legendre

Seja uma função $f(x)$ integrável no intervalo $[a, b]$ na Equação (7).

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \text{ onde } F'(x) = f(x) \quad (7)$$

Quando a forma analítica de $F(x)$ for de difícil obtenção ou se forem conhecidos somente valores discretos de $f(x)$, se faz necessário o uso de métodos numéricos para avaliar a integral de $f(x)$. O método de integração numérica Quadratura de Gauss-Legendre consiste em aproximar a função $f(x)$ por um polinômio interpolador e determinar analiticamente a integral desse polinômio no intervalo $[a, b]$ (CAMPOS, 2007).

A Quadratura de Gauss-Legendre considera que as abscissas não têm espaçamento constante, fazendo com que as fórmulas obtidas forneçam uma maior exatidão, usando mesmo número de pontos.

3.1.1 Polinômios de Lagrange

Sejam x_0, x_1, \dots, x_n $n + 1$ pontos diferentes. Considera-se para $k = 0, 1, \dots, n$, nos seguintes polinômios ℓ_k de grau n :

$$\ell_k(x) = \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)} \quad (8)$$

Substituindo x por x_k na Equação (8), observa-se que o numerador e o denominador são iguais, ou seja, $\ell_k(x_k) = 1$. Da mesma forma, substituindo x por x_j , com $j \neq k$, observa-se que o numerador se anula e desta forma $\ell_k(x_j) = 0$, como mostrado na Equação (9).

$$\ell_k(x_j) = \delta_{kj} = \begin{cases} 0, & \text{se } k \neq j, \\ 1, & \text{se } k = j. \end{cases} \quad (9)$$

Assim, o polinômio de grau máximo n para valores dados de $f_0 = f(x_0), f_1 = f(x_1), \dots, f_n = f(x_n)$ de uma função $y = f(x)$, é dado pela Equação (10). Destaca-se que a Equação (10), satisfaz $P_n(x_k) = f(x_k), k = 0, 1, 2, \dots, n$.

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k \ell_k(x) \quad (10)$$

Logo, a Equação (10) é chamada de Fórmula de Lagrange do Polinômio de Interpolação, sendo que $P_n(x)$ é o polinômio interpolador de $f(x)$ sobre os $n + 1$ pontos distintos x_0, x_1, \dots, x_n (CAMPOS, 2007).

3.1.2 Polinômios Ortogonais – Polinômios de Legendre

As fórmulas de quadratura de Gauss são baseadas nas propriedades de polinômios ortogonais.

Sejam $\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x), \dots$ uma família de polinômios de graus $0, 1, 2, \dots$; se obedecem a Equação (11), então os polinômios $\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x), \dots$ são ditos ortogonais.

$$\begin{cases} (\phi_i(x), \phi_j(x)) = 0 & \text{para } i \neq j, \\ (\phi_i(x), \phi_i(x)) \neq 0 & \text{para } \phi_i(x) \neq \theta. \end{cases} \quad (11)$$

Neste estudo, o produto escalar é definido pela Equação (12), onde $\omega(x)$ é a função peso, com $\omega(x) \geq 0$ e contínua em $[a, b]$, em que $\phi_n(x)$ possui raízes distintas em $[a, b]$. Os polinômios $\phi_i(x), i = 0, 1, 2, \dots$ podem ser obtidos pela ortogonalização da sequência $\{1, x, x^2, \dots\}$ usando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt.

$$(f, g) = \int_a^b \omega(x) f(x) g(x) dx \quad (12)$$

A sequência de polinômios $\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x), \dots$ depende do produto escalar adotado. Os polinômios de Legendre $P_0(x), P_1(x), \dots$ são obtidos por meio do produto escalar de Equação (13). Comparando a Equação (13) com a Equação (12), observa-se que $\omega(x) = 1, a = -1$ e $b = 1$ (FRANCO, 2006).

$$(f, g) = \int_{-1}^1 f(x) g(x) dx \quad (13)$$

3.1.3 Quadratura de Gauss

Sejam os polinômios $\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x), \dots$ nas condições definidas nas subseções anteriores e as raízes x_0, x_1, \dots, x_n de $\phi_{n+1}(x)$. Se $f(x)$ é um polinômio de grau menor ou igual $2n + 1$, tem-se a Equação (14), onde A_k são as abscissas calculadas por meio da Equação (15).

$$\int_a^b \omega(x) f(x) dx = \sum_{k=0}^n A_k f(x_k) \quad (14)$$

$$A_k = \int_a^b \omega(x) \ell_k(x) dx \quad (15)$$

Em que $\ell_k(x)$ são os polinômios dados pela Equação (8).

Por fim, o procedimento para calcular uma integral utilizando Quadratura de Gauss é apresentado a seguir (FRANCO, 2006):

- 1) Determinar o polinômio ortogonal $\Phi_{n+1}(x)$, segundo produto escalar conveniente, ou seja, com a função peso $\omega(x)$ e no intervalo $[a, b]$;
- 2) Calcular as raízes x_0, x_1, \dots, x_n de $\Phi_{n+1}(x)$;
- 3) Determinar os polinômios de Lagrange $\ell_k(x), k = 0, 1, \dots, n$, usando os pontos obtidos em 2);
- 4) Calcular $A_k = \int_a^b \omega(x) \ell_k(x) dx, k = 0, 1, \dots, n$;
- 5) Calcular o valor de $f(x)$ em x_0, x_1, \dots, x_n ;
- 6) E por fim, calcular Equação (14).

3.2 Fórmulas de Newton-Cotes

As fórmulas de Newton-Cotes são do tipo fechado, que são aquelas em que os pontos estão no intervalo de integração $[a, b]$ e fechado significa, também, que os pontos a e b são os pontos externos da fórmula de quadratura, ou seja, $a = x_0$ e $b = x_n$; os argumentos x_k são espaçados igualmente por uma quantidade h , calculada por $x_{k+1} - x_k = h$; a função peso, $\omega(x)$, é constante e igual a 1, e o intervalo de integração é finito (FRANCO, 2006).

Considerando $y = f(x)$ uma função na qual os valores $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ são conhecidos, por exemplo, por meio de uma tabela. A integral pode ser calculada pela Equação (16).

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx \cong \sum_{k=0}^n f_k \int_{x_0}^{x_n} \ell_k(x) dx \quad (16)$$

Como mencionado, os argumentos x_i estão igualmente espaçados de h e considerando a mudança de variável $u = \frac{x-x_0}{h}$, tem-se que:

$$dx = hdu \text{ quando } \begin{cases} x = x_0 \rightarrow u = 0 \\ x = x_n \rightarrow u = n \end{cases}$$

Desta forma, substituindo tais considerações na Equação (16), obtém-se a Equação (17).

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \cong \sum_{k=0}^n f_k h \int_0^n \lambda_k(u)du \quad (17)$$

Em que os λ_k são os polinômios de Lagrange para argumentos igualmente espaçados. Calculando a Equação (18), obtém-se a Equação (19), que por sua vez, é independente dos limites de integração (FRANCO, 2006).

$$\int_0^n \lambda_k(u)du = C_k^n \quad (18)$$

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \cong \sum_{k=0}^n f_k h C_k^n \quad (19)$$

Após obter a Equação (19), é possível obter as fórmulas de Newton-Cotes. As fórmulas usualmente utilizadas são: Regra do Trapézio, Regra 1/3 de Simpson e Regra 3/8 de Simpson. Neste estudo, será considerada apenas a Regra 3/8 de Simpson, devido sua maior precisão.

A Regra 3/8 de Simpson considera $n = 3$, ou seja, a fórmula para integração $f(x)$ será obtida entre quatro pontos consecutivos x_0, x_1, x_2, x_3 , usando polinômio do 3º grau. Assim, a Equação (19) pode ser escrita conforme a Equação (20):

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx \cong \sum_{k=0}^3 f_k h C_k^3 \quad (20)$$

Substituindo $n = 3$ na Equação (18), tem-se que $C_0^3 = \frac{3}{8}$, $C_1^3 = \frac{9}{8}$, $C_2^3 = \frac{9}{8}$ e $C_3^3 = \frac{3}{8}$.

Substituindo esses valores em (19), obtém-se a equação geral da Regra 3/8 de Simpson, Equação (21).

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx \cong \frac{3}{8}h[f(x_0) + 3(f(x_1) + f(x_2)) + f(x_3)] \quad (21)$$

Para se obter a Regra 3/8 de Simpson generalizada, deve-se dividir o intervalo $[a, b]$ em um número de subintervalos de amplitude $h = \frac{b-a}{3N}$ de tal forma que $x_0 = a$, $x_{3N} = b$. Desta forma, o número de subdivisões deve ser múltiplo de 3. Assim, a Regra 3/8 de Simpson Generalizada pode ser escrita conforme a Equação (22) (FRANCO, 2006).

$$\int_{x_0}^{x_{3N}} f(x)dx \cong \frac{3}{8}h[f(x_0) + 3(f(x_1) + f(x_2)) + 2f(x_3) + 3(f(x_4) + f(x_5)) + \dots + 2f(x_{3N-3}) + 3(f(x_{3N-2}) + f(x_{3N-1})) + f(x_{3N})] \quad (22)$$

Após conhecer os métodos numéricos de integração, na seção 4, será apresentada a metodologia adotada e as linhas de transmissão reais utilizadas para estudo.

4 METODOLOGIA

As simulações dos métodos de integração numérica e da modelagem magnética apresentados nas seções 2 e 3, foram realizadas no *software* Matlab®. Primeiramente, simulou-se a Lei de Biot-Savart utilizando os métodos de integração e variando o número de pontos de integração n para ambos os métodos. Sabe-se que quanto maior o número de pontos escolhidos, melhor a precisão dos resultados.

Para obter melhores resultados, os limites de integração e o número de pontos de integração para ambos os métodos foram atrelados a uma precisão para o resultado final. Ou seja, quanto melhor a precisão do resultado final a ser obtida, maiores os limites de integração e número de pontos de integração. A Figura 1 apresenta os fluxogramas para o cômputo do campo magnético utilizando o método de Newton-Cotes (a) e Quadratura de Gauss (b), respectivamente.

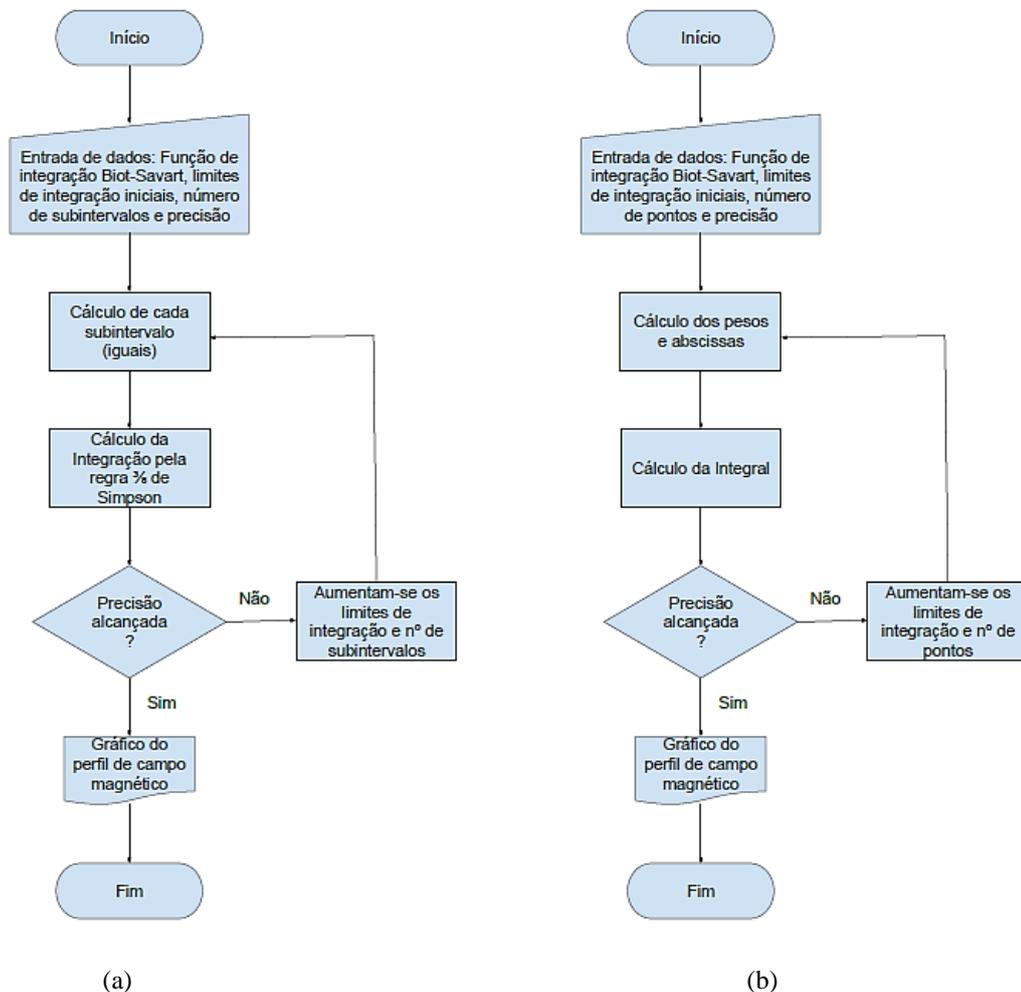


Figura 1- Fluxogramas: (a) método de Newton-Cotes (b) Quadratura de Gauss.
 Fonte: Dos autores (2017).

Os dados de medição de duas linhas de transmissão foram disponibilizados para estudo e análise pela empresa de energia Furnas-MG. As medidas de campo magnético foram realizadas nas linhas de transmissão de Estreito (LTFUES) e Mascarenhas de Morais (LTFUMM), entre as torres 3 e 4, localizadas próximas da Oficina Elétrica. As linhas de transmissão são mostradas na Figura 2. A Tabela 1 apresenta as características geométricas e elétricas das linhas LTFUES e LTFUMM.



Figura 2 - Linhas de Transmissão - LTFUES e LTFUMM.
Fonte: Acervo próprio (2017).

Tabela 1 - Características elétricas e geométricas das linhas

Característica	LTFUES	LTFUMM
Tensão	345 kV	345 kV
Corrente	309,5 A	293,8 A
Fase A	10,08 m	15,32 m
Fase B	10,45 m	15,45 m
Fase C	11,00 m	17,01 m
Distância entre cada Fase	8,40 m	
Distância entre as Torres	32,00 m	

Fonte: Dos autores (2017).

A faixa considerada na medição foi de 155 m, sendo 77 m para o lado LTFUES e 78 m para o lado LTFUMM. O eixo de simetria é o centro da distância entre as linhas de transmissão. Conforme previamente citado foi adotada a corrente média para as simulações computacionais. A altura do instrumento para a medição foi de 1 m do solo. O solo na faixa de medição é irregular e, portanto, há uma diferença nas alturas dos cabos de fase, fruto do relevo onde estão presentes as LTs.

Finalmente, a Figura 3 apresenta os valores de densidade de campo magnético em uma faixa de medição de 155 m entre as linhas de transmissão LTFUES e LTFUMM, considerando como eixo de simetria o centro da distância entre as linhas de transmissão. Na

seção 5, serão comparados os dados obtidos por meio de medição das linhas LTFUES e LTFUMM com os extraídos das simulações computacionais dos modelos magnéticos apresentados na seção 2 e métodos numéricos de integração da seção 3.

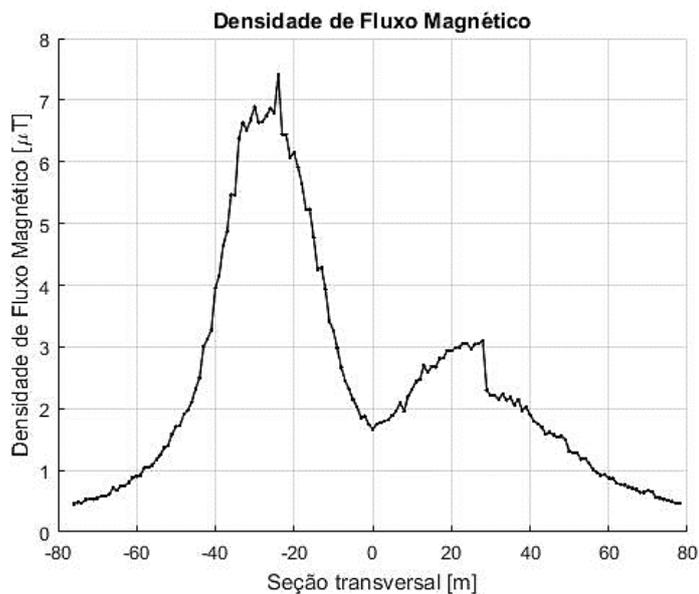


Figura 3 - Medições de campo magnético nas linhas LTFUES e LTFUMM..
Fonte: Dos autores (2017).

5 RESULTADOS

Nesta seção são apresentadas as comparações e análises de campo magnético. As curvas para densidade de campo magnético nas linhas de transmissão medidas pelo método de integração Quadratura de Gauss são apresentadas na Figura 4.

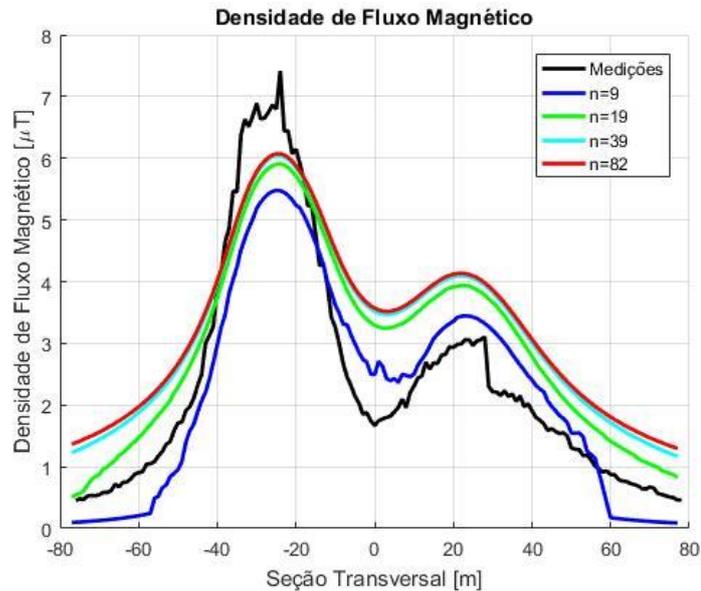


Figura 4 - Curvas de densidade de campo magnético utilizando Quadratura de Gauss na Lei de Biot-Savart variando n .

Fonte: Dos autores (2017).

Observa-se na Figura 4, que o comportamento das curvas obtidas por simulação computacional é similar a curva de medição em campo. A medida que o número de pontos de integração aumenta, a curva fica mais suave e apresenta valores máximos próximos dos valores medidos. Após $n = 39$, os valores de densidade de campo magnético praticamente se mantêm inalterados. A Tabela 2 apresenta os valores obtidos do centro das duas torres, os valores máximos, assim como os valores na faixa de passagem das linhas de transmissão.

Tabela 2 - Informações numéricas da Figura 3 referentes aos campos magnéticos simulados e medidos

Posição (m)	Medições (μT)	$n=9$ (μT)	$n=19$ (μT)	$n=39$ (μT)	$n=82$ (μT)
0	1,668	2,495	3,294	3,517	3,568
-76	0,452	0,101	0,547	1,254	1,39
77	0,461	0,088	0,822	1,167	1,296
-25	6,797	5,479	5,902	6,043	6,072
22	2,991	3,438	3,935	4,094	4,135

Fonte: Dos autores (2017).

A Tabela 3 mostra os erros entre os valores medidos e os valores calculados para cada número de pontos de integração.

Tabela 3 - Diferença (%) entre valores medidos e Quadratura de Gauss

Posição (m)	n=9 (%)	n=19 (%)	n=39 (%)	n=82 (%)
0	-49,580	-97,482	-110,851	-113,908
-76	77,654	-21,017	-177,433	-207,522
77	80,911	-78,308	-153,145	-181,127
-25	19,390	13,167	11,093	10,666
22	-14,944	-31,561	-36,877	-38,248

Fonte: Dos autores (2017).

Analisando as Tabelas 2 e 3 é possível observar que ao aumentar o número de pontos de integração o erro diminui nos valores em que se observa maior densidade de campo magnético, posições -25 m e 22 m, sendo estes os pontos mais importantes da análise. Ainda assim, tais erros são considerados altos em relação à medição.

A mesma análise é feita para o método de Newton-Cotes, variando o número de pontos de integração, a fim de realizar uma comparação com os valores medidos. As curvas resultantes da densidade de campo magnético são apresentadas na Figura 5.

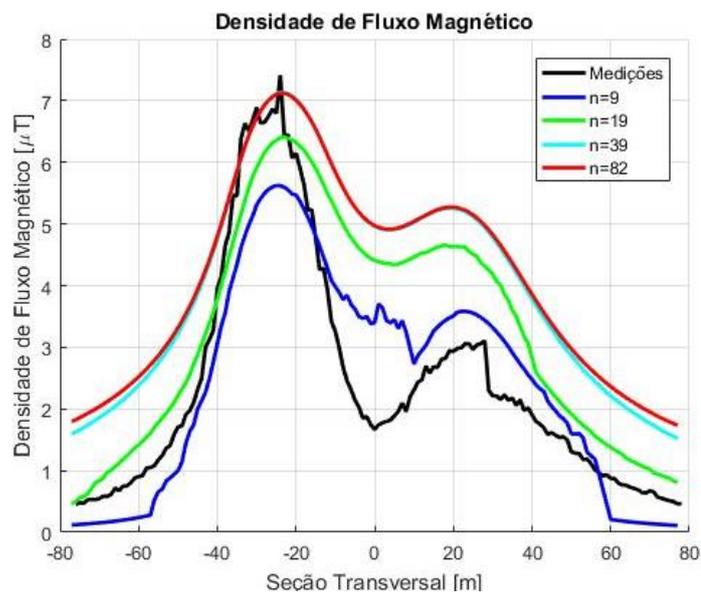


Figura 5 - Curvas de densidade de campo magnético utilizando Newton-Cotes na Lei de Biot-Savart variando n.

Fonte: Dos autores (2017).

Observa-se pela Figura 5, que todas as curvas também têm comportamento similar ao comportamento da curva de medição. A medida que o número de pontos de integração aumenta, a curva fica mais suave. Porém, para esse método de integração, os valores de campo máximo distanciam muito dos valores máximos de medição, quando comparado ao método de Quadratura de Gauss. A Tabela 4 apresenta como os erros entre os valores medidos e os valores calculados para cada número de pontos de integração são relativamente altos.

Tabela 4 - Diferença (%) entre valores medidos e Newton-Cotes.

Posição (m)	n=9 (%)	n=19 (%)	n=39 (%)	n=82 (%)
0	-103,956	-164,328	198,201	198,201
-76	72,964	10,840	267,256	304,203
77	76,160	75,488	229,284	275,704
-25	17,272	6,649	-4,472	-4,472
22	-19,759	-54,663	-75,459	-75,459

Fonte: Dos autores (2017).

Tais valores altos de erros são devido à complexidade da função de campo magnético a ser integrada, que por sua vez, faz com que o espaçamento constante de integração, que é uma característica do método de Newton-Cotes, seja propício a erros maiores quando comparados à Quadratura de Gauss.

Após a comparação das curvas de densidade de campo magnético por métodos de integração e medidas, realizou-se a comparação dos três modelos de cálculo com as medições: método analítico, utilizando Lei de Ampère, método de integração Quadratura de Gauss na Lei de Biot-Savart com $n = 39$ e método de integração Newton-Cotes na Lei de Biot-Savart com $n = 39$, apresentados na Figura 6.

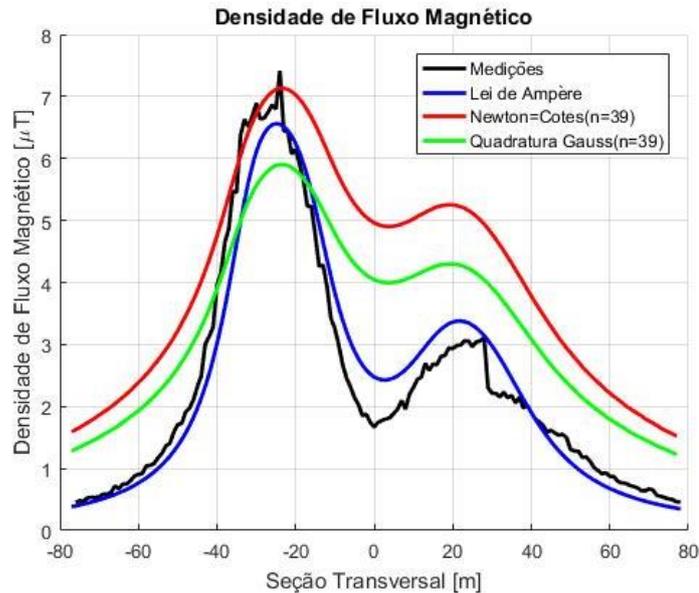


Figura 6 - Curvas de densidade de campo magnético dos métodos numéricos, cálculo analítico e medições.

Fonte: Dos autores (2017).

Tabela 5 - Diferença (%) entre valores medidos, métodos numéricos e cálculo analítico.

Posição (m)	Analítico (%)	N-Cotes (%)	Gauss (%)
0	48,5	198,201	-110,851
-76	-12,38	267,256	-177,433
77	-22,12	229,284	-153,145
-25	-3,38	-4,472	11,093
22	13,04	-75,459	-36,877

Fonte: Dos autores (2017).

Apesar de todas as curvas apresentarem comportamentos semelhantes, observou-se que as curvas obtidas por meio de métodos numéricos de integração divergiram muito dos valores medidos. Os métodos numéricos têm grande sensibilidade a erros, sejam eles de arredondamento, truncamento, entre outros. Além disso, as medições podem ter seus valores alterados devido à temperatura e umidade no momento da medição. Em sua maioria, os métodos numéricos são mais usuais quando há geometrias mais complexas a serem exploradas, como arranjos de subcondutores e quando é necessário analisar situações reais,

como influências de estruturas de suporte, geometria real dos cabos, entre outros. A Tabela 5 apresenta os erros relativos dos métodos numéricos e do cálculo analítico. Desta forma, observa-se que o cálculo analítico obteve os melhores valores, fato que pode ser observado na Figura 6.

6 CONCLUSÃO

O cálculo do campo magnético possui grande importância no projeto e construção de uma linha de transmissão. Por meio deste cálculo é realizado o dimensionamento da faixa de passagem da linha de transmissão, podendo este influenciar até mesmo na disposição dos cabos de fase e altura da torre.

Este artigo propôs o cálculo do campo magnético utilizando métodos numéricos de integração aplicados à Lei de Biot-Savart. Foram comparados os métodos de integração de Quadratura de Gauss e Newton-Cotes. Em ambos os métodos, observou-se que à medida que o número de pontos de integração aumentava, os valores de campo magnético aproximavam-se da curva de medição. Porém, o método de Quadratura de Gauss obteve melhores resultados, uma vez que seus pontos não são igualmente espaçados, aumentando assim a sua precisão. Entretanto, o custo computacional do método de Quadratura de Gauss é maior pois, os pesos e abscissas precisam ser calculados para cada integração.

Ao se comparar os métodos de integração com o cálculo analítico observou-se que este último obteve resultados mais precisos e custo computacional relativamente baixo. Os resultados numéricos poderiam obter valores mais próximos das medições caso os limites de integração fossem segmentados, o que faria com que o número de pontos de integração fosse total para cada segmento da integral, aumentando assim a precisão dos resultados.

Desta forma conclui-se que, para este tipo de aplicação, o cálculo analítico é considerado mais apropriado, uma vez que seus resultados ficaram muito próximos dos valores medidos.

NUMERICAL INTEGRATION METHODS APPLIED TO MAGNETIC FIELD CALCULATION GENERATED BY TRANSMISSION LINES

ABSTRACT

ForSci.: r. cient. IFMG, Formiga, v. 5, n. 3, e00295, jul./dez. 2017.

The magnetic fields generated by transmission lines have been investigated since the 1960s due to the connection of exposure to these fields with certain pathologies. Historically, the computation of the levels of magnetic fields produced by transmission lines is carried out by means of analytical methods. The purpose of this article is to calculate such fields through numerical integration methods applied to the Biot-Savart Law. In this way, the magnetic modeling and integration methods of Newton-Cotes and Gauss Quadrature are presented. The computation of the magnetic field is done through the software Matlab® and for better visualization of the efficiency of the numerical methods, the number of integration points is varied. The obtained magnetic field levels are compared with analytical calculation by Ampère's Law and real measurements of two transmission lines of the Furnas System. Despite the improvement in the precision of the results by increasing the number of integration points for both numerical methods, none obtained good results as the analytical calculation in comparison to the measurements. This result shows that numerical methods are mostly employed in more complicated calculations and more complex transmission lines geometries.

Keywords: Magnetic field. Numerical integration. Transmission line.

REFERÊNCIAS

AGÊNCIA NACIONAL DE ENERGIA ELÉTRICA (ANEEL). **Resolução Normativa nº 394**, de 23 de março de 2010. Disponível em: <<http://www2.aneel.gov.br/cedoc/ren2010398.pdf>>. Acesso em: 12 set. 2017.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. Comitê Brasileiro de Eletricidade. **NBR 5422**: projetos de linhas de transmissão de energia elétrica. Rio de Janeiro: ABNT, 1985.

CAMPOS, Frederico Ferreira F. **Algoritmos numéricos**. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2007.

CLAYTON, Paul R. **Introduction electromagnetic Compatibility**. 2 ed. Hoboken: Wiley-Interscience, 2006.

FRANCO, Neide Bertoldi. **Cálculo numérico**. São Paulo: Pearson, 2006.

INTERNATIONAL COMMISSION ON NON-IONIZING RADIATION PROTECTION. ICNIRP Guidelines: for limiting exposure to time-varying electric, magnetic, and electromagnetic fields (up to 300 GHz). **Health Phys** **74**, vol. 4, p. 494-522, 1998. Disponível em: <<http://www.icnirp.org/cms/upload/publications/ICNIRPemfgdl.pdf>>. Acesso em: 10 jul. 2017.

LAFOREST, J. J. **Transmission-line reference book - 345 kV and above**. 2. ed. Californian: Electric Power Research Institute, 1982.

LOPES, A. A. **Cálculo da distribuição de campo elétrico e indução magnética em subestações de energia e linhas de transmissão.** Dissertação. Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2009. Disponível em: <http://www.bdt.d.ufpe.br/handle/123456789/5384>>. Acesso em: 22 jul. 2017.

MORENO, R. F. **Possíveis efeitos sobre a saúde humana decorrentes da exposição a campos elétricos e magnéticos de baixa frequência.** Revisão comentada da literatura XVI SNPTEE. Campinas, 2001. Disponível em: < <http://www.epte.com.br/trabalhos/gia26.pdf>>. Acesso em: 22 jul. 2017.

SANTOS, M. G. **Acoplamento elétrico entre linhas de transmissão operando em regime permanente e dutos metálicos aéreos.** 2011. 110 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Universidade Federal de São João Del-Rei, São João Del-Rei, 2011.

SHADIKU, Matthew N. O. **Elementos de eletromagnetismo.** 5ª ed. Porto Alegre: Bookman, 2004.

Recebido em: 16/08/2017

Aprovado em: 15/09/2017

Publicado em: 24/11/2017