

ARTIGO

MODELAGEM MATEMÁTICA DA CARGA HIDRÁULICA E VAZÃO EM CONDUTOS¹Douglas Frederico Guimarães Santiago²

Diego Herbert Paula

Fábio Junior da Silva

Douglas Barroso Santos

Evaldo da Conceição Silva

Atair França Antunis

Neuber da Silva

Diogo Rodrigues Trindade

RESUMO

Este trabalho apresenta o desenvolvimento de vários aspectos da modelagem da vazão e carga hidráulica do escoamento fluido em condutos no decorrer do tempo, quando submetido ao que, na literatura, costuma-se chamar de “Golpe de Aríete”. O trabalho foca no fenômeno, percorrendo desde as deduções das equações utilizadas até uma implementação numérica, utilizando o método das características. O objetivo principal é fornecer ao leitor interessado em trabalhar com o tema, os princípios básicos envolvendo o modelo elástico do fenômeno. Para atingir o objetivo, procuramos detalhar aspectos da dedução das equações que em geral não são detalhados ou difíceis de encontrar na literatura especializada, principalmente no que tange às simplificações necessárias para se chegar nas fórmulas básicas. O mesmo foi feito para explicar como o método das características é utilizado nas equações.

Palavras-chave: Carga Hidráulica. Método das Características. Golpe de Aríete. Modelo Elástico.

1 INTRODUÇÃO

A água é de fundamental importância para a vida de todas as espécies. Atualmente, notícias e artigos de falta e/ou escassez de água tem se tornado comum (VIEIRA, 2014; COUTINHO, 2015; OLIVIERA, 2018). Tendo este panorama em vista, é necessário atacar o desperdício em todas as suas formas. Uma maneira de se fazer isto é através da localização das perdas (ou fugas) de água nos sistemas de distribuição, no caminho entre o local de armazenamento e o consumidor final. Para isto é interessante que se tenha controle da vazão e

¹ **Como citar este artigo:** SANTIAGO, D. F. G. *et al.* Modelagem matemática da carga hidráulica e vazão em condutos. **ForScience:** revista científica do IFMG, Formiga, v. 7, n. 1, e00510, jan./jun. 2019. DOI: 10.29069/forscience.2019v7n1.e510.

² **Autor para correspondência:** Douglas Frederico G. Santiago. E-mail: douglas.santiago@ict.ufvjm.edu.br.

da carga hidráulica em cada ponto do sistema e em cada instante de tempo. Este controle pode ser feito através da modelagem matemática dos sistemas de distribuição.

Para se modelar sistemas de distribuição, primeiramente é necessário entender o comportamento de um conduto único. Neste trabalho abordaremos a modelagem da carga hidráulica e vazão em um conduto unidimensional submetido à certas condições iniciais e de contorno nos extremos do conduto. A carga hidráulica em um extremo será mantida constante enquanto a vazão em outro extremo será subitamente interrompida. Nosso foco será então no comportamento da carga hidráulica em um ponto qualquer do conduto.

Segundo Gumier (2005), Gumier e Luvizotto Júnior (2007), o modelo inercial elástico, ou simplesmente modelo elástico, leva em consideração os efeitos elásticos da água e da tubulação, sendo, portanto mais geral que outros modelos utilizados, podendo abranger mudanças drásticas nas condições da rede, como uma partida ou parada de uma bomba, ruptura de uma tubulação ou o fechamento muito rápido de uma válvula. Na literatura (FOX, 1977), este modelo é desenvolvido através de um sistema de equações diferenciais parciais provenientes da lei de continuidade e da dinâmica. A solução analítica exata deste sistema não é conhecida, sendo necessário então o uso de métodos numéricos para obtenção de uma solução aproximada. O procedimento numérico mais utilizado neste caso é baseado no método das características (ABBOTT, 1966; WICHOWSKI, 2006).

Em trabalhos especializados sobre o tema, dentre os quais destacamos as referências (GUMIER, 2005; GUMIER; LUVIZOTTO JUNIOR, 2007; WICHOWSKI, 2006), em geral são apresentados de forma bem técnica: 1) o sistema de equações diferenciais que serão utilizados, sem dedução das equações e 2) O processo numérico utilizado, baseado no método das características, também sem maiores detalhes das deduções que dão sentido ao método. Esta abordagem, em que se omitem detalhes do desenvolvimento do modelo e do método numérico utilizado para sua resolução pode ser interessante e prática para quem já é familiarizado com o tema, mas torna difícil para um leitor mais leigo, ou alguém que queira adentrar na área, compreender seus aspectos de uma forma mais completa. Para auxiliar principalmente este leitor, este trabalho pretende ser um material de consulta que permita o entendimento rápido dos princípios envolvidos sobre o tema. Para isto, inicia-se com a dedução das equações, de forma que o leitor alvo entenda principalmente as simplificações utilizadas para se chegar às equações diferenciais básicas, dando meios para que este possa, caso queira, posteriormente propor seu modelo próprio, utilizando equações mais completas. É bom salientar que não é objetivo do trabalho entrar em detalhes técnicos sobre o significado de alguns parâmetros utilizados, como o módulo de Young, E , o módulo volumétrico, K , e o

fator de atrito f , mas apenas utilizá-los, aceitando as equações que lhes dão sentido e manipulando-as dentro de um contexto maior, para, passo a passo, chegar nas equações básicas utilizadas no modelo. Caso o leitor precise de mais detalhes destes parâmetros, basta consultar as referências utilizadas.

Pretende-se também desenvolver, passo a passo, o método das características aplicado diretamente no sistema de equações diferenciais, fornecendo assim, um entendimento mais rápido dos princípios do método numérico atualmente mais utilizado na resolução do problema. Por fim, através de uma implementação utilizando o SCILAB (SCILAB, 2016), testa-se os resultados obtidos, comparando-os com aqueles obtidos no trabalho de Wichowski (2006). O Trabalho de Wichowski (2006), também aborda um modelo baseado em um conduto que é mantido sob carga hidráulica constante de um lado, enquanto, do outro lado, há um fechamento abrupto de uma válvula que impede assim a passagem de fluido. Neste referido trabalho apresenta-se então resultados numéricos do comportamento da carga hidráulica no conduto, utilizando um método previsor-corretor baseado no método das características sobre as equações diferenciais parciais que modelam o problema. Estes resultados numéricos são então validados comparando-os com resultados obtidos através de experimentos. Em nosso trabalho, também utilizando o método das características, desenvolvemos e implementamos nosso método numérico, sem a parte corretora do método desenvolvido por Wichowski e comparamos então com os resultados numéricos obtidos por este.

2 DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE

A primeira das equações diferenciais parciais que governam o fenômeno é baseada na equação de continuidade. Para esta dedução, baseada em (STREETER, 1972), consideremos a Figura 1. Na Figura, está representado um elemento infinitesimal do fluido no conduto, de largura δx , à uma cota Z . A Carga hidráulica, H , representa a altura que o fluido sob pressão atingiria caso não estivesse restrito ao conduto. $H-Z$ é a altura piezométrica. A quantidade de massa fluida que é transportada a cada instante de tempo, considerando uma posição x no conduto é dada por ρQ , em que ρ é densidade do fluido e Q a vazão.

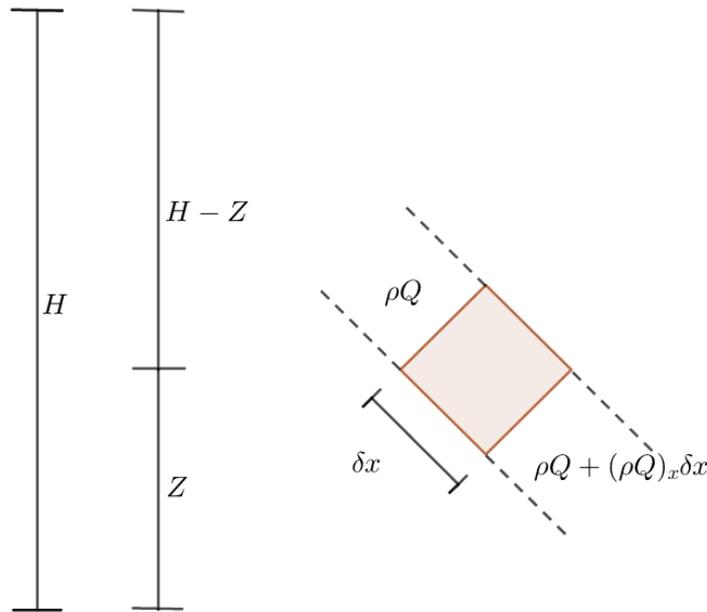


Figura 1 – Elemento fluido em um conduto. ρQ é a quantidade de massa fluida transportada em um instante de tempo em uma posição x do conduto. δx a largura do conduto. Z a altura do elemento de fluido. H a carga hidráulica. $H-Z$ a altura piezométrica
Fonte: Autores (2018).

A equação da continuidade se baseia na ideia simples de que a taxa de aumento da massa fluida com o tempo no elemento fluido é igual à diferença entre a massa que sai e a que entra nos extremos do elemento. Utilizando série de Taylor para estimar a quantidade de massa fluida que passa por um lado do elemento de conduto, e subtraindo da quantidade de massa fluida que passa pelo outro lado do elemento de conduto, obtém-se uma aproximação para a variação de massa líquida no elemento, expressa no lado esquerdo da Equação (1). Esta deve corresponder à taxa de variação no tempo da quantidade de massa fluida no elemento, que por sua vez pode ser estimada pelo produto da taxa de variação temporal da massa em uma seção transversal de área A do elemento, $(\rho A)_t$, com a largura do elemento que está representado pelo lado direito da Equação (1). Nesta equação, os subíndices x e t , representam as derivadas parciais em relação à posição x e ao tempo t respectivamente.

$$-(\rho Q)_x \delta x = (\rho A)_t \delta x \quad (1)$$

O fluxo é dado por Q ($Q = AV$), em que V a velocidade média do fluxo em uma posição x . É bom lembrar que todas as grandezas, em princípio, podem variar também com o tempo.

Substituindo $Q = AV$ e desenvolvendo a Equação (1), esta pode ser reescrita pontualmente da seguinte forma

$$-(\rho AV)_x = (\rho A)_t \quad (2)$$

Utilizando a regra da derivada do produto nos dois lados da Equação (2) chega-se à Equação (3).

$$-\rho_x AV - \rho A_x V - \rho AV_x = \rho A_t + \rho_t A \quad (3)$$

Considerando uma partícula de fluido que se move segundo uma função $x(t)$, as derivadas totais de ρ e A em relação ao tempo são dadas pelas Equações (4) e (5).

$$\dot{\rho} = \rho_x \frac{dx}{dt} + \rho_t \quad (4)$$

$$\dot{A} = A_x \frac{dx}{dt} + A_t \quad (5)$$

Estas equações representam as taxas de variações da densidade e da área da seção transversal sobre uma partícula de fluido. Substituindo dx/dt nas duas equações pela velocidade V da partícula de fluido, temos:

$$\dot{\rho} = \rho_x V + \rho_t \quad (6)$$

$$\dot{A} = A_x V + A_t \quad (7)$$

Multiplicando a Equação (6) por A e a Equação (7) por ρ temos:

$$A\dot{\rho} = A\rho_x V + A\rho_t \quad (8)$$

e

$$\dot{A}\rho = \rho A_x V + \rho A_t \quad (9)$$

Isolando os termos $A\rho_x V$ na Equação (8) e $\rho A_x V$ na Equação (9) e os substituindo na Equação (3) temos

$$-A\dot{\rho} + A\rho_t - \rho\dot{A} + \rho A_t - \rho AV_x = \rho A_t + \rho_t A.$$

Anulando os termos iguais, multiplicando os dois lados da equação por -1 e dividindo todos por ρA podemos reescrevê-la como:

$$\mathbf{V}_x + \frac{\dot{\rho}}{\rho} + \frac{\dot{A}}{A} = \mathbf{0}. \quad (10)$$

A Equação (10) representa a forma mais geral da equação de conservação de massa para o fenômeno. Esta envolve as derivadas totais da densidade e da área, isto é, assumimos o ponto de vista da partícula de fluido que percorre o conduto. As grandezas ρ , H e Z estão associadas à pressão p no ponto pela expressão $p = \rho g(H - Z)$. Nesta expressão, é bom frisar que p é função de ρ , H e Z , mas estas grandezas não são variáveis independentes.

Segundo Streeter (1972) para pequenas variações da densidade, o módulo volumétrico K , pode ser considerado constante e dado pela Equação (11):

$$K = \rho \frac{dp}{d\rho}. \quad (11)$$

Utilizando a regra da cadeia na Equação (11) obtém-se

$$K = \rho \left(\frac{dp}{dt} \frac{dt}{d\rho} \right). \quad (12)$$

Temos que dp/dt é a derivada total de p em relação ao tempo e $d\rho/dt$ a derivada total da massa específica em relação ao tempo. Desta forma a Equação (11) pode ser reescrita como:

$$K = \rho \frac{\dot{p}}{\dot{\rho}}. \quad (13)$$

Ainda segundo Streeter (1972) com algumas simplificações, também é válida a Equação (14):

$$\frac{\dot{A}}{A} = \frac{\dot{p}D}{eE} \quad (14)$$

Onde E é o módulo de Young, o termo e é a espessura da parede do conduto e D o diâmetro do conduto. Em materiais pouco deformáveis, o módulo de Young é grande, assim, pequenas variações na área da seção transversal do conduto, podem estar associados a grandes variações de pressão. Em materiais mais deformáveis, este efeito é minimizado.

As Equações (10), (13) e (14) podem então ser combinadas formando a seguinte equação

$$V_x + \frac{\dot{p}}{K} + \frac{\dot{p}D}{eE} = 0 \quad (15)$$

Utilizando a expressão $p = \rho g(H - Z)$, e desprezando pequenas variações na densidade do fluido, temos

$$\dot{p} = \rho g V H_x - \rho g V Z_x + \rho g H_t - \rho g Z_t \quad (16)$$

Considerando ainda que a altura Z do ponto não varia muito, isto é, temos condutos aproximadamente horizontais e, além disto, que a velocidade de propagação da carga hidráulica, refletida aqui na derivada temporal, H_t , é muito mais rápida que a velocidade do fluido, V , vamos considerar significativo apenas o termo $\rho g H_t$. Considerando ainda que a variação da área da seção transversal A , depende pouco da variável x , substituindo da Equação (16) na Equação (15), e multiplicando e dividindo a equação resultante por A , resulta resulta na Equação (17).

$$H_t + \frac{\alpha^2}{gA} Q_x = 0 \quad (17)$$

Em que g é a aceleração da gravidade, H é a carga hidráulica e α é uma constante, chamada de celeridade e definida pela Equação (18). Esta constante tem unidade de velocidade.

$$\alpha = \sqrt{\frac{K/\rho}{1 + \frac{KD}{Ee}}} \quad (18)$$

3 DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO DA DINÂMICA

A segunda das equações diferenciais parciais que governa o fenômeno é obtida da resultante de forças atuando no sistema. A dedução desta equação foi baseada em Chaudhry (1979). Considere a Figura 2, em que temos um elemento de fluido, sendo a área transversal média do conduto dado por A , e o comprimento do elemento de fluido no conduto dado por δx . Se a carga na posição inicial for H , então, utilizando série de Taylor, seus valores correspondentes em $x + \delta x$ são $H + H_x \delta x$, aproximadamente.

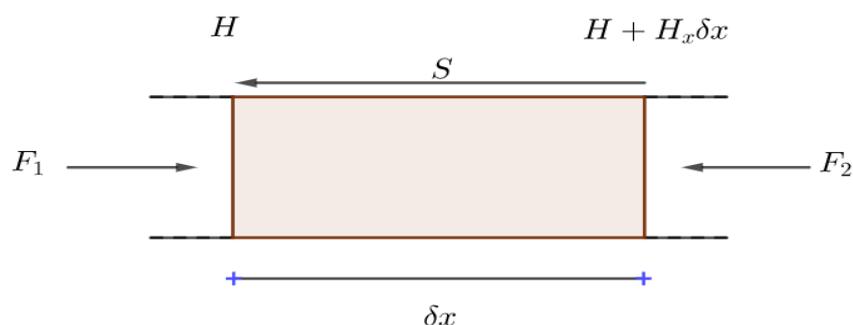


Figura 2 – Forças atuando no elemento de fluido no conduto. F_1 e F_2 são forças atuando à esquerda e à direita do elemento de fluido. S representa uma força de cisalhamento atuando no fluido devido ao atrito com as paredes do conduto. δx é a largura do conduto

Fonte: Autores (2018).

A ideia é que a partir da carga H , consigamos estabelecer uma resultante de forças F no sistema de controle proveniente das pressões à esquerda, à direita e da força de cisalhamento nas paredes do conduto. À esquerda temos uma força F_1 , dada por:

$$F_1 = \rho g A (H - Z).$$

Atuando à direita, temos uma força F_2 dada por:

$$F_2 = \rho g A (H - Z + H_x \delta x).$$

Além destas, temos uma força de cisalhamento S , atuando no fluido devido ao atrito com as paredes do conduto que segundo Chaudhry (1979) obedece à fórmula Darcy-Weisbach dada pela Equação (19).

$$S = \rho \frac{fV^2}{8} \pi D \delta x \quad (19)$$

A resultante de forças F é dada então por:

$$F = -\rho g A H_x \delta x - \rho \frac{fV^2}{8} \pi D \delta x \quad (20)$$

De acordo com a segunda lei de Newton, esta resultante de forças tem de ser igual à massa em movimento do fluido, vezes a aceleração. Esta massa pode ser estimada pela expressão $\rho A \delta x$. A aceleração é dada pela Equação (21).

$$\dot{V} = V_x V + V_t \quad (21)$$

Aplicando a segunda lei de Newton e dividindo o resultado por ρA , chegamos à Equação (22). O último termo antes da igualdade na Equação (22) é obtido considerando a expressão da área da seção transversal $A = \pi D^2/4$.

$$V_t + VV_x + gH_x + \frac{fV^2}{2D} = 0 \quad (22)$$

Segundo Chaudhry (1979), na maioria dos problemas transitórios, o termo VV_x pode ser desprezado quando comparado ao termo V_t . Para explicar o fluxo reverso, a expressão V^2 , proveniente da fórmula de Darcy-Weisbach (Equação (19)), pode ser trocada por $V/|V|$, representando assim mudanças no sentido da força cisalhante, que depende do sentido da velocidade V . Escrevemos então a Equação (22) em termos do fluxo Q . Para isto, consideramos A constante, ou de variação temporal desprezível. Segundo Streeter (1972), podemos fazer esta simplificação, apesar de reconhecermos que pequenas variações na área A , através da Equação (14), influenciam a constante de celeridade a , na Equação (17). Rearranjando os termos, obtemos então a Equação (23).

$$Q_t + gAH_x + \frac{f}{2DA} Q|Q| = 0 \quad (23)$$

4 MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS

Utilizaremos então as Equações diferenciais parciais (17) e (23) deduzidas para modelar a carga $H(x,t)$ e a vazão $Q(x,t)$. Faremos então uma aplicação do método das características diretamente ao sistema de Equações (24).

$$\begin{cases} H_t + \frac{a^2}{gA} Q_x = 0 \\ Q_t + gAH_x + \frac{f}{2DA} Q|Q| = 0 \end{cases} \quad (24)$$

Primeiramente, multiplicando a primeira equação por um número λ (de unidade m/s^2) e somando as duas chega-se à Equação (25):

$$\lambda \left(H_t + \frac{gA}{\lambda} H_x \right) + \left(Q_t + \frac{\lambda a^2}{gA} Q_x \right) + \frac{f}{2DA} Q|Q| = 0 \quad (25)$$

Fazendo $\lambda = \pm gA/a$ temos a Equação (26):

$$\pm \frac{gA}{a} (H_t \pm aH_x) + (Q_t \pm aQ_x) + \frac{f}{2DA} Q|Q| = 0 \quad (26)$$

No caso $\lambda = gA/a$ e considerando uma curva $x(t)$ tal que $dx/dt = a$, utilizando a regra da cadeia, obtém-se a Equação (27).

$$\frac{gA}{a} \dot{H} + \dot{Q} + \frac{f}{2DA} Q|Q| = 0 \quad (27)$$

Onde o ponto indica a derivada total em relação ao tempo. Procedendo de forma análoga, com $\lambda = -gA/a$ e considerando $dx/dt = -a$ temos a Equação (28).

$$-\frac{gA}{a} \dot{H} + \dot{Q} + \frac{f}{2DA} Q|Q| = 0 \quad (28)$$

Para resolver numericamente o problema, discretizamos o domínio de forma que a variação espacial esteja relacionada à variação temporal pela expressão $\Delta x = a\Delta t$. A variação espacial, ao longo do conduto, é representada na direção horizontal, através do índice j , e a variação temporal é representada na direção vertical, através do índice i .

$$H_{i,j} \approx H((i-1)\Delta x, (j-1)\Delta t), Q_{i,j} \approx Q((i-1)\Delta x, (j-1)\Delta t).$$

A Figura (3) representa uma parte do domínio discretizado, mostrando alguns pontos da discretização. Na Figura, também estão representadas algumas retas com coeficiente angular positivo ($dx/dt=a$) e negativo ($dx/dt=-a$) passando pelos pontos de discretização. Estas são chamadas de retas características. Substituindo as derivadas totais ao longo das retas características nas Equações (27) e (28) por diferenças simples, obtemos o sistema de Equações lineares (29).

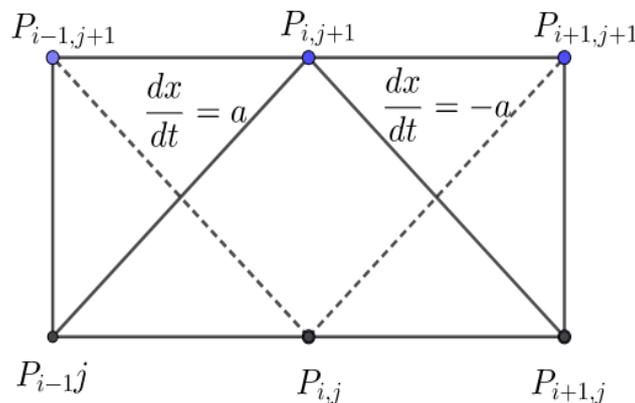


Figura 3 - Diagrama das Retas Características
Fonte: Os autores (2018).

$$\begin{cases} H_{i,j+1}^P - H_{i-1,j} + \frac{a}{gA} (Q_{i,j+1}^P - Q_{i-1,j}) + \frac{af}{2gDA^2} |Q_{i-1,j}| Q_{i-1,j} \Delta t = 0 \\ H_{i,j+1}^P - H_{i+1,j} - \frac{a}{gA} (Q_{i,j+1}^P - Q_{i+1,j}) - \frac{af}{2gDA^2} |Q_{i+1,j}| Q_{i+1,j} \Delta t = 0 \end{cases} \quad (29)$$

A carga e vazão de um ponto $P_{i,j+1}$, interior ao domínio, pode então ser estimada através da resolução do sistema (29), sabendo a carga e vazão nos pontos $P_{i-1,j}$ e $P_{i+1,j}$. O problema como um todo pode ser resolvido numericamente, desde que forneçamos as condições iniciais $H(x,0)$, $Q(x,0)$, além das condições de contorno $H(0,t)$ e $Q(L,t)$, em que L representa o comprimento do conduto. O problema também pode ser resolvido com variações destas condições de contorno.

5 TESTANDO O SCRIPT

Com base no sistema de Equações (29), foi desenvolvido um *script* no SCILAB (SCILAB, 2016) e utilizado o trabalho de Wichowski (2006) para teste. No trabalho de Wichowski, foi utilizado um esquema predictor corretor para o método numérico. Neste trabalho, não houve implementação da parte corretora deste esquema.

Foi considerado um conduto de 41 metros ($L=41m$) de comprimento com diâmetro de 42 milímetros ($D=0.042m$). À esquerda deste conduto, manteve-se a carga hidráulica em um patamar constante de 50m ($H_0=50m$). À direita do conduto, uma válvula será fechada rapidamente. Considerou-se então a velocidade $V_0=0.3269814m/s$ para o fluido no regime permanente, (antes do fechamento da válvula). Tomou-se a celeridade do fluido como $a=1260m/s$. A viscosidade cinemática do fluido foi considerada de $\nu=1,0 \times 10^{-6}m^2/s$. Esta última foi utilizada para se determinar o número de Reynolds ($rey=V*D/\nu$), que foi utilizado na fórmula $f=0.23rey^{-0.22}$ para se determinar o fator de atrito, baseado na referência (SOUSA; NETO, 2014). A aceleração da gravidade foi considerada de $g=9,81 m/s^2$. O processo de fechamento da válvula foi realizado segundo a Equação (30):

$$Q = -\frac{Q_0}{t_c} t + Q_0 \quad (30)$$

Onde Q é vazão, $Q_0 = V_0A$ é a vazão inicial no regime permanente e t_c é o tempo de duração do processo de fechamento da válvula que foi determinado como $t_c = 0,034s$. Considerou-se ainda uma discretização do domínio, com o conduto dividido em 30 partes iguais, isto é, $\Delta x \approx 1.37m$.

Nas Figuras 4 e 5 observa-se a carga hidráulica estimada pelo método numérico. Na Figura 4, temos o comportamento da carga hidráulica em uma posição intermediária do conduto, especificamente, na posição de $20.5m$ e na Figura 5, a carga em uma posição perto do final do conduto ($34.2m$), próximo à válvula.

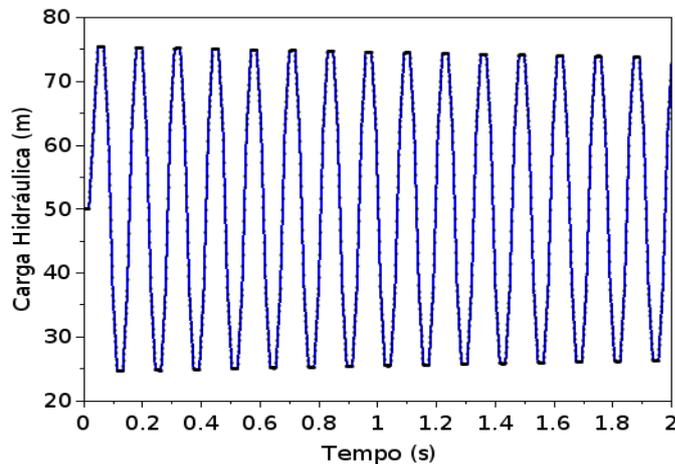


Figura 4 - Carga Hidráulica em um ponto intermediário do conduto
Fonte: Os autores (2018).

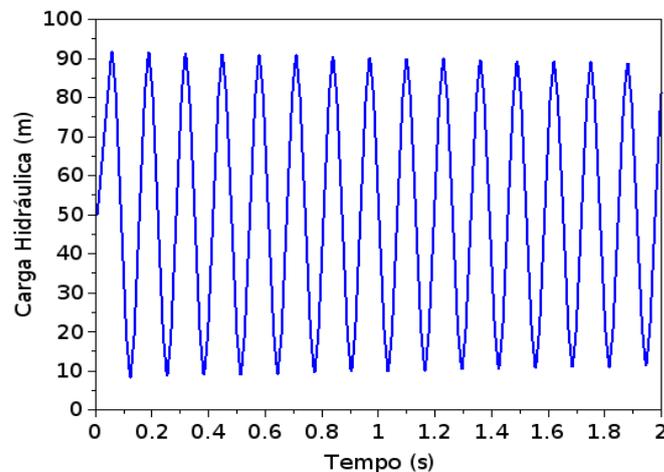


Figura 5 - Carga Hidráulica no final do conduto
Fonte: Os autores (2018).

O fechamento abrupto da válvula em um extremo do conduto provoca um aumento da pressão do fluido neste extremo, ocasionando uma onda de pressão que se propaga por todo o conduto, o que se traduz nos valores de carga hidráulica. Analisando os gráficos, verifica-se estas oscilações da carga hidráulica, cuja intensidade tende a diminuir com o tempo. Em uma posição intermediária, os efeitos do fechamento abrupto da válvula é menos intenso, com pico máximo de carga hidráulica de cerca de $75m$. No final do conduto, próximo à válvula, observa-se pico máximo de cerca de $92m$ de carga hidráulica. Estes

resultados são os mesmos obtidos no trabalho de Wichowski (2006), tanto numericamente, como também pelo experimento que o referido autor realizou. Temos, portanto, uma validação do método numérico, desenvolvido passo a passo neste trabalho. O comportamento mostrado pelos gráficos auxilia também no entendimento do fenômeno como um todo, que se iniciou desde as deduções das equações básicas.

6 CONCLUSÃO

Neste trabalho abordou-se a Modelagem da Carga Hidráulica e Vazão de fluidos em condutos, tendo em vista o modelo elástico do problema, que permite variações tanto da densidade do fluido como na área da seção transversal do tubo. Apesar de permitidas, considera-se estas variações pequenas. Mesmo pequenas estas variações tem efeito na pressão sobre uma partícula de fluido que se movimenta no conduto. Este efeito é captado pelas Equações (11) e (14) e incorporadas na constante a , a celeridade. A primeira das equações relaciona variações na pressão com variações na densidade através do módulo volumétrico K . A segunda introduz o módulo de Young E para relacionar variações na pressão com variações na área da seção transversal do conduto. Através destas expressões, da equação da continuidade, mais a fórmula $p = \rho g(H - Z)$, que relaciona pressão e densidade com carga hidráulica, chega-se, com algumas simplificações, à Equação (17), que representa uma das equações básicas de nosso modelo. Utilizando novamente a expressão $p = \rho g(H - Z)$, através de uma resultante de forças, em que a força cisalhante na parede do conduto é dada pela fórmula de Darcy-Weisbach, onde se introduz a força de atrito, f , foi possível a dedução da outra das equações básicas de nosso modelo elástico.

Tendo o sistema de equações diferenciais parciais que modelam o problema, aplicou-se nas equações o método das características, deduzindo cada passo do processo, e dando origem assim ao sistema de Equações (29), cuja solução fornece uma aproximação numérica para as cargas H e a vazão Q em alguns pontos do conduto com o tempo. Implementou-se então na linguagem do SCILAB um script que foi testado utilizando dados do trabalho de Wichowski (2006). Para o cálculo do fator de atrito f , utilizou-se a referência (SOUZA; NETO, 2014). Apesar do método numérico desenvolvido neste trabalho não utilizar a parte corretora do método previsor-corretor utilizado em Wichowski (2006), obtemos resultados semelhantes, com carga máxima estimada em cerca de $92m$.

Acreditamos que o trabalho atinge o objetivo proposto, fornecendo de forma rápida e simples os princípios básicos envolvidos no estudo do fenômeno para o leitor interessado

em adentrar no estudo do tópico. Apesar desta simplicidade, a abordagem é feita de forma completa, desde as deduções das equações básicas, até o desenvolvimento e teste do método numérico atualmente mais utilizado para atacar o problema, fornecendo assim, meios para que se possa introduzir modelos mais complexos, ou testar diferentes métodos numéricos para sua resolução.

MATHEMATICAL MODELING OF HYDRAULIC HEAD AND CONDUCT FLOW

ABSTRACT

This work presents the development of several aspects of flow modeling and hydraulic head of fluid flow in conduits over time, when submitted to what is commonly referred to in the literature as "Water Hammer". The work focuses on the phenomenon, ranging from the deductions of the equations used until a numerical implementation, using the method of characteristics. The main objective is to provide the reader interested in working with the theme, the basic principles involving the elastic model of the phenomenon. To reach the objective, we seek to details aspects of the deduction of the equation that are not usually detailed or difficult to find in the literature, especially with regard to the simplifications necessary to arrive at the basic formulas. We do the same to explain the method of characteristics directly applied on those basic formulas.

Keywords: Hydraulic Head. Method of Characteristics. Water hammer. Elastic Model.

REFERÊNCIAS

ABBOTT, M. B. **The Method of Characteristics**. London: Thames and Hudson London, Bristol, 1966.

CHAUDHRY, M. H. **Applied Hydraulic Transients**. 1. ed. New York: Copyright, 1979.

COUTINHO, R. M.; KRAENKEL, R. A.; PRADO, P. I. Catastrophic Regime Shift in Water Reservoirs and São Paulo Water Supply Crisis. **Plos One**, v. 10, n. 9, 2015.
DOI:10.1371/journal.pone.0138278.

FOX, J. A. **Hidraulic Analysis of Unsteady Flow in Pipe Networks**. London: The Macmillan Press, 1977.

GUMIER, C. C. **Aplicação de Modelo Matemático de Simulação: otimização na gestão de perda de água em sistemas de abastecimento**. 2005. 160 f. Dissertação. (Mestrado em Engenharia Civil) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2005.

GUMIER, C. C.; JUNIOR LUVIZOTTO, E. **Aplicação de modelo de simulação**: otimização na gestão de perda de água em sistemas de abastecimento. *Eng.sanit.ambient*, São Paulo, v. 12, n. 1, p. 32-34. Janeiro, 2007.

OLIVEIRA, K. **País tem 917 municípios em crise hídrica; maioria está no Nordeste**. Agência Brasil, 20 mar. 2018. Disponível: <http://agenciabrasil.ebc.com.br/geral/noticia/2018-03/pais-tem-917-municipios-em-crise-hidrica-maioria-esta-no-nordeste>. Acesso em: 06 out. 2018.

SCILAB. **Open source software for numerical computation**. Scilab Enterprises, 2016. Disponível em: <http://www.scilab.org/>. Acesso em: 18 abr. 2019.

SOUSA, J. S. C.; NETO, J. D. Equação Explícita para Cálculo do Fator de Atrito de Darcy-Weisbach em Projetos de Irrigação Pressurizada. *Irriga*, Botucatu, v. 19, n. 1, p. 137-148, jan./mar. 2014.

STREETER, V.L. **Unsteady Flow Calculations by Numerical Methods**. 1972. Disponível em: <http://fluidsengineering.asmedigitalcollection.asme.org/>. Acesso em: 17 jul. 2018.

VIEIRA, G.; RIBEIRO, B. Nível da Cantareira cai a 16,4%, novo recorde negativo. **Estadão**, 28 fev. 2014. Disponível: <https://www.estadao.com.br/noticias/geral,nivel-da-cantareira-cai-a-16-4-novo-recorde-negativo,1135794>. Acesso em: 06 out. 2018.

WICHOWSKI, R. Hydraulic Transients Analysis in Pipe Networks by the Method of Characteristics (MOC). *Gdańsk, Polan*, v. 53, n. 3, p. 267–291. Agosto, 2006.

DADOS DOS AUTORES

Douglas Frederico Guimarães Santiago

E-mail: douglas.santiago@ict.ufvjm.edu.br

Currículo Lattes: <http://lattes.cnpq.br/0791925989169133>

Doutorado em Modelagem Computacional pelo Laboratório Nacional de Computação Científica (LNCC), mestrado e graduação em Matemática pela Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG). Atualmente é professor adjunto da Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri (UFVJM).

Diego Herbert Paula

E-mail: diego-herbert@hotmail.com

Currículo Lattes: <http://lattes.cnpq.br/4734827165043912>

Graduando em Ciência e Tecnologia pela UFVJM.

Fábio Junior da Silva

E-mail: fabiojunior-89@hotmail.com

Graduando em Ciência e Tecnologia pela UFVJM.

Douglas Barroso Santos

E-mail: douglasb-20@hotmail.com

Graduando em Ciência e Tecnologia pela UFVJM.

Evaldo da Conceição Silva

E-mail: evaldo.c.silva@hotmail.com

Currículo Lattes: <http://lattes.cnpq.br/3031298490266810>

Graduando em Ciência e Tecnologia pela UFVJM.

Atair França Antunis

E-mail: atairhs@hotmail.com

Graduando em Ciência e Tecnologia pela UFVJM.

Neuber da Silva

E-mail: neuber-silva@hotmail.com

Currículo Lattes: <http://lattes.cnpq.br/7659432822425188>

Graduando em Ciência e Tecnologia pela UFVJM.

Diogo Rodrigues Trindade

E-mail: diogort.eng@gmail.com

Currículo Lattes: <http://lattes.cnpq.br/9589997592626389>

Graduando em Ciência e Tecnologia pela UFVJM.